

Mathématique

Bertrand Mareschal

bmaresc@ulb.ac.be

<http://homepages.ulb.ac.be/~bmaresc/math-umons.html>

Plan du cours

1. Introduction

- Contenu du cours

2. Logique mathématique

- Calcul propositionnel
- Calcul des prédicats
- Logique floue et aide à la décision

3. Récurrence et induction

4. Analyse d'algorithmes

- Comparaison asymptotique de fonctions
- Complexité

5. Mathématique de la gestion

- Théorie des graphes
- Optimisation

1. Introduction

- Présentations et documents disponibles sur la page web du cours.
- Optionnel: Livres de référence:
 - G. Haggard, J. Schlipf et S. Whitesides (2006): **Discrete Mathematics for Computer Science**, Thomson Brooks/Cole, ISBN: 9-780534-495015
 - S. Lipschutz (1983): **Mathématiques pour informaticiens**, série Schaum, McGraw Hill, ISBN: 2-7042-1067-5
 - R. Sedgewick et P. Flajolet (1996): **Introduction à l'analyse des algorithmes**, International Thomson Publishing, ISBN: 2-84180-957-9
- Evaluation :
 - Projet personnel (aide à la décision)
 - Examen écrit en deux parties : théorie (sans notes) et exercices (à livre ouvert).

Plan du cours

1. Introduction

- Contenu du cours

2. Logique mathématique

- Calcul propositionnel
- Calcul des prédicats
- Logique floue et aide à la décision

3. Récurrence et induction

4. Analyse d'algorithmes

- Comparaison asymptotique de fonctions
- Complexité

5. Mathématique de la gestion

- Théorie des graphes
- Optimisation

2. Logique mathématique

- Logique classique :
 - Un énoncé a 2 valeurs de vérité possibles :
 - Vrai (V) ou faux (F).
 - Calcul propositionnel.
 - Calcul des prédicats.
- Logique floue :
 - Un énoncé peut être « plus ou moins » vrai ou faux.
 - Application en aide à la décision.

Calcul propositionnel

- **Énoncé :**
 - 2 valeurs de vérité possibles : V (vrai) ou F faux)
 - *Exemples :*
 - Paris est en France.
 - Charleroi est au nord de Bruxelles.
 - $2 + 2 = 5$
 - *Attention :*
 - Où allez-vous ? (n'est pas un énoncé)
- **Énoncé composé :** sous-énoncés connectés à l'aide d'opérateurs logiques.
- **Proposition :** énoncé composé faisant intervenir des variables (p, q, r, \dots)

Conjonction logique - « et »

- Conjonction de deux propositions p et q :

$$p \wedge q$$

- Table de vérité :

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjonction logique - « ou »

- Disjonction de deux propositions p et q :
« ou » non exclusif $p \vee q$
- Table de vérité :

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Négation logique - « non »

- Négation d'une proposition p :
« il est faux que... » $\neg p$
- Table de vérité :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Table de vérité d'une proposition

- Exemple : $\neg(p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Propositions particulières

- **Tautologie :**
 - Proposition qui est toujours vraie (V partout dans la dernière colonne de la table de vérité).
- **Contradiction :**
 - Proposition qui est toujours fausse (F partout dans la dernière colonne de la table de vérité).
- **Exemples :**
 - Tautologie :
 - Contradiction :

$$p \vee \neg p$$

$$p \wedge \neg p$$

Equivalence logique

- Deux propositions P et Q sont logiquement équivalentes si elles ont des tables de vérité identiques : $P \equiv Q$
- Exemple : $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$		p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F		V	V	F	F	F
V	F	F	V		V	F	F	V	V
F	V	F	V		F	V	V	F	V
F	F	F	V		F	F	V	V	V

Algèbre des propositions (1)

- Lois idempotentes :

$$p \vee p \equiv p \qquad p \wedge p \equiv p$$

- Lois d'associativité :

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

- Lois de commutativité :

$$p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Algèbre des propositions (2)

- Lois de distributivité :

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

- Lois d'identité :

$$p \vee f \equiv p$$

$$p \wedge t \equiv p$$

$$p \vee t \equiv t$$

$$p \wedge f \equiv f$$

(t : tautologie, f : contradiction)

Algèbre des propositions (3)

- Lois de complémentarité :

$$p \vee \neg p \equiv t$$

$$p \wedge \neg p \equiv f$$

$$\neg t \equiv f$$

$$\neg f \equiv t$$

- Loi d'involution :

$$\neg \neg p \equiv p$$

- Lois de de Morgan :

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Enoncé conditionnel

- « Si p , alors q » : $p \rightarrow q$
 - p implique q , p seulement si q
- Table de vérité :

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Enoncé biconditionnel

- « p si et seulement si q » : $p \leftrightarrow q$
- Table de vérité :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Propriétés

- En fonction des opérateurs logiques :

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

- Contraposée :

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

Exemples

- Si j'étudie, je réussis mon examen.
- Si je réussis mon examen, c'est que j'ai étudié.
- Si je ne réussis pas mon examen, c'est que je n'ai pas étudié.
- Si je n'étudie pas, je ne réussis pas mon examen.

- Si A est un triangle équilatéral, A est isocèle (V).
- Si A est un triangle isocèle, A est équilatéral (F).

Raisonnement (1)

- Relation entre un ensemble de propositions (P_1, P_2, \dots, P_n) appelées prémisses et une proposition Q appelée conclusion : $P_1, P_2, \dots, P_n \succ Q$
- Un raisonnement est valide si Q est vraie dans tous les cas où les prémisses sont toutes vraies.
- Un raisonnement non valide est appelé contre-vérité.

Raisonnement (2)

- Exemples :

- Valide (modus ponens) : $p, p \rightarrow q \succ q$

- Contre-vérité : $p \rightarrow q, q \succ p$

- Syllogisme : $p \rightarrow q, q \rightarrow r \succ p \rightarrow r$

- Propriété :

$$P_1, P_2, \dots, P_n \succ Q$$

est valide ssi

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$$

est une tautologie

Implication logique

- P implique logiquement Q si Q est vraie dans tous les cas où P est vraie : $P \Rightarrow Q$
- Exemple : $p \Rightarrow p \vee q$

Propriétés

- Théorème : Les trois énoncés suivants sont équivalents :
 1. $P \Rightarrow Q$
 2. Le raisonnement $P \succ Q$ est valide
 3. $P \rightarrow Q$ est une tautologie
- Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$, P et Q ont la même table de vérité et $P \equiv Q$

Formes normales

- Objectifs :
 - Simplifier l'interprétation de propositions.
 - Vérifier qu'une proposition peut être vraie, ou qu'elle est une tautologie.
- 2 formes normales :
 - Forme normale disjonctive.
 - Forme normale conjonctive.

Forme normale disjonctive

- Exemple 1 :
 - Les deux propositions suivantes sont logiquement équivalentes :

$$(p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$$

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

- Vérification : tables de vérité identiques.
- La 2^{ème} est sous forme normale disjonctive.

p	q	r	$q \vee r$	$p \rightarrow q \vee r$	$q \rightarrow p$	\leftrightarrow
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

p	q	r	$q \vee r$	$p \rightarrow q \vee r$	$q \rightarrow p$	\leftrightarrow
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Forme normale disjonctive

- Exemple 2 : (négation)

$$\neg((p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow (q \rightarrow p))$$

$$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

Forme normale disjonctive

- Théorème :
Toute proposition est logiquement équivalente à une proposition sous forme normale disjonctive (pas nécessairement unique).
- Principe de démonstration :
 - Ecrire la table de vérité.
 - Identifier les lignes pour lesquelles la proposition est vraie.
 - Ecrire la disjonction des conjonctions de « lettres » correspondantes.

Exemple 3

$$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg r)$$

p	q	r	$\neg(p \rightarrow q)$	$q \wedge \neg r$	\rightarrow
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

Exemple 3

$$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg r)$$

p	q	r	$\neg(p \rightarrow q)$	$q \wedge \neg r$	\rightarrow
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

$$(p \wedge q) \vee \neg p$$

Forme normale conjonctive

- Exemple 1 :
 - Les deux propositions suivantes sont logiquement équivalentes :

$$(p \rightarrow (q \vee r)) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$$

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$$

- Vérification : tables de vérité identiques.
- La 2^{ème} est sous forme normale conjonctive.

Forme normale conjonctive

- Théorème :
Toute proposition est logiquement équivalente à une proposition sous forme normale conjonctive (pas nécessairement unique).
- Principe de démonstration :
 - Transformer la négation de la proposition sous forme normale disjonctive.
 - Utiliser la loi de De Morgan pour se ramener à une forme normale conjonctive pour la proposition.

Exemple 3

$$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg r)$$

p	q	r	$\neg(p \rightarrow q)$	$q \wedge \neg r$	\rightarrow
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

Exemple 3

$$\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg r))$$

p	q	r	$\neg(p \rightarrow q)$	$q \wedge \neg r$	$\neg(\rightarrow)$
V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Exemple 3

$$\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg r))$$

p	q	r	$\neg(p \rightarrow q)$	$q \wedge \neg r$	$\neg(\rightarrow)$
V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

Exemple 3

$$\begin{aligned} & \neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg r)) \\ & \equiv \\ & (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg r) \\ & \equiv \\ & (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \end{aligned}$$

Calcul des prédicats

- **Prédicat** : Proposition qui porte sur des éléments variables d'un ensemble fixé.
- **Exemples** :
 - n est pair.
 - Le triangle T est isocèle.
 - La relation R sur N est réflexive.

Prédicat

- Définition : Application P qui associe une proposition $P(x)$ à chaque élément x d'un ensemble E (univers du prédicat).
- Poids d'un prédicat : nombre de variables.
- Exemples :

$$P(n) = \{n \in \mathbb{Z} \text{ est pair}\} \quad (\text{poids } 1)$$

$$P(a,b) = \{a,b \in \quad \text{sont tels que } a + b = 5\} \quad (\text{poids } 2)$$

$$Q(b) = P(3,b) = \{b \in \quad \text{est tel que } 3 + b = 5\} \quad (\text{poids } 1)$$

$$R = Q(9) = \{3 + 9 = 5\} \quad (\text{poids } 0)$$

$$P(a) = \{a \in \sim \text{ est positif}\} \quad (\text{poids } 1)$$

$$Q(a,b) = \{a \in \sim, b \in B \text{ sont tels que } a \text{ est positif}\} \quad (\text{poids } 2)$$

Combinaisons de prédicats

- Exemples :

$$P(n) = \{n \in \text{est pair}\}$$

$$Q(n) = \{n \in \text{est le carré d'un autre entier naturel}\}$$

$$\neg P(n) = \{n \in \text{n'est pas pair}\}$$

$$P \wedge Q(n) = \{n \in \text{est pair et est le carré d'un autre entier naturel}\}$$

$$P \vee Q(n) = \{n \in \text{est pair ou est le carré d'un autre entier naturel}\}$$

Combinaisons de prédicats

- Exemples :

$$P(n) = \{n \in \text{est pair}\}$$

$$Q(m) = \{m \in \text{est divisible par 3}\}$$

$$P \wedge Q(n) = \{n \in \text{est pair et est divisible par 3}\}$$

$$R(m, n) = \{n \in \text{est pair}\}$$

$$S(m, n) = \{m \in \text{est divisible par 3}\}$$

$$R \wedge S(m, n) = \{n \in \text{est pair et } m \in \text{est divisible par 3}\}$$

Quantificateurs

- Quantificateur universel :
 - Quel que soit x la proposition $P(x)$ est vraie :

$$\forall x : P(x)$$

- Quantificateur existentiel :
 - Il existe x tel que la proposition $P(x)$ est vraie :

$$\exists x : P(x)$$

Quantificateurs

- Exemples :

$$P(n) = \{n \in \text{est pair}\}$$

$$\forall n : P(n) = \{\text{tout entier naturel est pair}\} \quad (\text{faux})$$

$$\exists n : P(n) = \{\text{il existe un entier naturel est pair}\} \quad (\text{vrai})$$

Quantificateurs

- Théorème 1 : Soit $P(a,b)$ un prédicat de poids 2. Alors :

$$1^\circ \quad \forall a \forall b : P(a,b) \equiv \forall b \forall a : P(a,b)$$

$$2^\circ \quad \exists a \exists b : P(a,b) \equiv \exists b \exists a : P(a,b)$$

$$3^\circ \quad \exists b : \forall a : P(a,b) \Rightarrow \forall a : \exists b : P(a,b)$$

$$4^\circ \quad \exists a : \forall b : P(a,b) \Rightarrow \forall b : \exists a : P(a,b)$$

Quantificateurs

- Exemple :

$$P(a,b) = \{a,b \in \mathbb{Z} \text{ sont tels que } a + b = 5\}$$

$\forall a \forall b : P(a,b)$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{tous les } a,b \in \mathbb{Z} \text{ sont} \\ \text{tels que } a + b = 5 \end{array} \right\}$	F
$\exists a \exists b : P(a,b)$		V
$\exists b : \forall a : P(a,b)$		F
$\forall a : \exists b : P(a,b)$		V
$\exists a : \forall b : P(a,b)$		F
$\forall a : \exists b : P(a,b)$		V

Quantificateurs

- Théorème 2 :

$$1^\circ \quad \neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : (\neg P(x))$$

$$2^\circ \quad \neg(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : (\neg P(x))$$

- Exemples :

$$\neg(\forall n : n \text{ est divisible par } 3)$$

$$\equiv$$

$\exists n : n$ n'est pas divisible par 3

$$\neg(\forall x : \exists y : P(x, y)) \equiv \exists x : \forall y : \neg P(x, y)$$

Quantificateurs

- Théorème 3 :

$$1^\circ \quad \forall x : (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x))$$

$$2^\circ \quad \exists x : (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x : P(x)) \wedge (\exists x : Q(x))$$

$$3^\circ \quad \exists x : (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x))$$

$$4^\circ \quad \forall x : (P(x) \vee Q(x)) \Leftarrow (\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))$$

Quantificateurs

- Exemple :

$$P(x) = \{x \in \text{est pair}\}$$

$$Q(x) = \{x \in \text{est impair}\}$$

$\forall x : (P(x) \wedge Q(x))$		F
$(\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x))$		F
$\exists x : (P(x) \wedge Q(x))$		F
$(\exists x : P(x)) \wedge (\exists x : Q(x))$		V
$\exists x : (P(x) \vee Q(x))$		V
$(\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x))$		V
$(\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))$		F
$\forall x : (P(x) \vee Q(x))$		V

Logique floue

- Un énoncé a un degré de vérité compris entre 0 et 1.
- Exemple : « il fait chaud »
 - 0 : faux,
 - 0,2 : plutôt faux,
 - 0,5 : peut-être bien...
 - 0,8 : plutôt vrai,
 - 1 : vrai.
- Redéfinition des opérateurs logiques.

Application en aide à la décision

- Problèmes de décision.
- Modélisation des préférences.
- Structures de préférences.
- La méthodologie PROMETHEE.

Quelques Problèmes de Décision et d'Evaluation

- Choisir le site d'implantation d'une nouvelle usine, d'un magasin, ...
- Engager du personnel, GRH.
- Acheter du matériel.
- Evaluer la qualité des fournisseurs.
- Evaluer des projets.
- Choisir une stratégie d'investissement.

Tableau Multicritère

- Actions :
 - décisions possibles,
 - items à évaluer.
- Critères :
 - quantitatifs,
 - qualitatifs.

Tableau Multicritère

Action 1	
Action 2	
Action 3	
Action 4	
Action 5	
...	

Tableau Multicritère

	Crit. 1 (unité)	Crit. 2 (unité)	Crit. 3 (unité)	Crit. 4 (unité)	...
Action 1					
Action 2					
Action 3					
Action 4					
Action 5					
...					

Tableau Multicritère

	Crit. 1 (/20)	Crit. 2 (cote)	Crit. 3 (appréc.)	Crit. 4 (O/N)	...
Action 1	18	135	B	Oui	...
Action 2	9	147	M	Oui	...
Action 3	15	129	TB	Non	...
Action 4	12	146	TM	?	...
Action 5	7	121	B	Oui	...
...

Localisation d'une Usine

	Investissement (BEF)	Coûts (BEF)	Environn. (estimation)	...
Site 1	18	135	B	...
Site 2	9	147	M	...
Site 3	15	129	TB	...
Site 4	12	146	TM	...
Site 5	7	121	B	...
...

Possibilité d'Achats

	Prix (BEF)	Fiabilité (jours)	Maintenance (estimation)	...
Produit A	18	135	B	...
Produit B	9	147	M	...
Produit C	15	129	TB	...
Produit D	12	146	TM	...
Produit E	7	121	B	...
...

Un Exemple

Achat d'une automobile

Objectifs :

- Economie à l'achat (prix),
- Economie à l'usage (consommation),
- Performances (puissance),
- Confort,
- Habitabilité.

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	360000	75	8,0	3	3
Sport	390000	110	9,0	1	2
Moyenne B	355000	85	7,0	4	3
Luxe 1	480000	90	8,5	4	5
Economic	250000	50	7,5	2	1
Luxe 2	450000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	360000	75	8,0	3	3
Sport	390000	110	9,0	1	2
Moyenne B	355000	85	7,0	4	3
Luxe 1	480000	90	8,5	4	5
Economic	250000	50	7,5	2	1
Luxe 2	450000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	360000	75	8,0	3	3
Sport	390000	110	9,0	1	2
Moyenne B	355000	85	7,0	4	3
Luxe 1	480000	90	8,5	4	5
Economic	250000	50	7,5	2	1
Luxe 2	450000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?
- Quel est le meilleur compromis ?

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	360000	75	8,0	3	3
Sport	390000	110	9,0	1	2
Moyenne B	355000	85	7,0	4	3
Luxe 1	480000	90	8,5	4	5
Economic	250000	50	7,5	2	1
Luxe 2	450000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?
- Quel est le meilleur compromis ?
- Quelles sont les priorités de l'acheteur ?



Modélisation des préférences

- Problème :
Comment comparer deux actions a et b entre elles ?
- Premier modèle : 3 résultats possibles :
 1. Préférence : aPb ou bPa
 2. Indifférence : alb
 3. Incomparabilité : aRb

Structure de préférences

- Propriétés (logiques):

$aPb \Rightarrow \text{non } bPa$	P est asymétrique
ala	I est réflexive
$alb \Rightarrow bla$	I est symétrique
Non aRa	R est irréflexive
$aRb \Rightarrow bRa$	R est symétrique

- Ces trois relations de préférence forment une structure de préférence (s.p.), si pour tous a, b de A on a toujours l'une des quatre situations suivantes :

aPb ou bPa ou alb ou aRb

Structure de préférence traditionnelle (unicritère)

- Optimisation d'une fonction g définie sur A

$$\forall a, b \in A: \begin{cases} aPb & \Leftrightarrow g(a) > g(b) \\ aIb & \Leftrightarrow g(a) = g(b) \end{cases}$$

- Conséquences :

R est vide
P est transitive
I est transitive

- Préordre total.

Notion de seuil d'indifférence

- Problème : Intransitivité de l'indifférence.

Cf. Paradoxe de la tasse de café (Luce, 1956)

- Introduction d'un seuil d'indifférence :

$$\forall a, b \in A: \begin{cases} aPb & \Leftrightarrow g(a) > g(b) + q \\ aIb & \Leftrightarrow |g(a) - g(b)| \leq q \end{cases}$$

- Quasi-ordre : P est transitive, mais pas I.

Autres structures de préférences

- Seuil d'indifférence variable
⇒ Notion d'ordre d'intervalle.
- Seuil de préférence + seuil d'indifférence
⇒ Notion de pseudo-ordre.
- Modèles incluant l'incomparabilité
⇒ Notion d'ordre partiel.
- **Structures valuées de préférences.**

Théorie du choix social

- Problème :
 - Un groupe de personnes doivent choisir un candidat parmi plusieurs (élection).
 - Chaque personne (électeur) classe les candidats par ordre de préférence.
 - Quel candidat doit être élu ?
- Quelle est la « meilleure » procédure de vote ?
- Analogie avec les modèles multicritères :
 - Candidats \leftrightarrow actions,
 - Electeurs \leftrightarrow critères.

5 procédures... ... parmi d'autres...

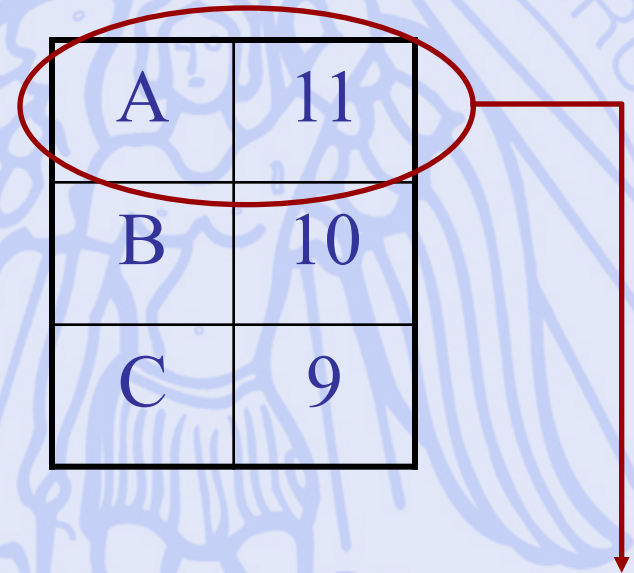
1. Majorité relative.
2. Condorcet.
3. Scrutin à 2 tours (présidentielle).
4. Borda.
5. Éliminations successives.

Procédure 1 : Majorité relative

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

30 votants:

11 votants	10 votants	9 votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A



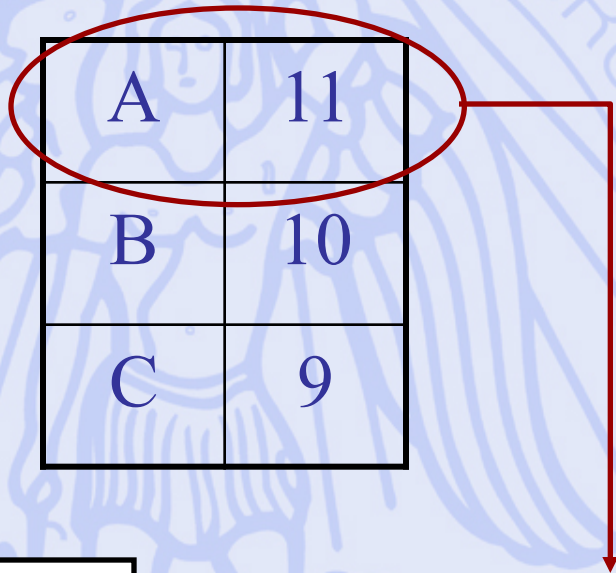
Albert est élu

Procédure 1 : Majorité relative

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

30 votants:

11 votants	10 votants	9 votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A



Problème : B et C préférés à A par une majorité de votants !

Albert est élu

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Marquis de Condorcet 1743 - 1794



Procédure 2 : Condorcet

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

30 votants:

11 votants	10 votants	9 votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

B meilleur que A	19 votes
B meilleur que C	21 votes
C meilleur que A	19 votes

Bruno est élu

Procédure 2 : Paradoxe de Condorcet

3 candidats: Albert, Bruno, Claire
9 votants:

4 votants	3 votants	2 votants
A	B	C
B	C	A
C	A	B

A meilleur que B	6 votes
B meilleur que C	7 votes
C meilleur que A	5 votes



pas d'élus !

Procédure 3 : Scrutin à 2 tours

(élection présidentielle française)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane

63 votants:

22 votants	21 votants	20 votants
B	C	D
A	A	A
C	D	C
D	B	B

1^{er} tour: B et C

2^{ème} tour: C bat B
(41 contre 22)

Claire est élue

Procédure 3 : Scrutin à 2 tours

(élection présidentielle française)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane

63 votants:

22 votants	21 votants	20 votants
B	C	D
A	A	A
C	D	C
D	B	B

Claire est élue !!!

...alors que

A meilleur que C	42 votes
A meilleur que B	41 votes
A meilleur que D	43 votes

Procédure 3 : scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

17 votants:

5 votants	6 votants	4 votants	2 votants
C	A	B	B
A	B	C	A
B	C	A	C

1^{er} tour:	A et B
-----------------------------	--------

2^{ème} tour:	A bat B (11 contre 6)
------------------------------	--------------------------

Albert est élu

Procédure 3 : scrutin à 2 tours

(élection présidentielle française)

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

17 votants:

5 votants	6 votants	4 votants	2 votants
C	A	B	A B
A	B	C	B A
B	C	A	C

Albert était élu

1^{er} tour: A et C

2^{ème} tour: C bat A
(9 contre 8)

Claire est élue !

Problème : non-monotonicité !

Jean Charles de Borda

1733 - 1799



Procédure 4 : Borda

3 candidats: Albert, Bruno, Claire
 81 votants:

30 votants	29 votants	10 votants	10 votants	1 votant	1 votant
A	C	C	B	A	B
C	A	B	A	B	C
B	B	A	C	C	A

Points		Score
2	A	101
1	B	33
0	C	109

$$31 \times 2 + 39 \times 1$$

$$11 \times 2 + 11 \times 1$$

$$39 \times 2 + 31 \times 1$$

Claire est élue !

Procédure 4 : Borda

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

81 votants:

30 votants	29 votants	10 votants	10 votants	1 votant	1 votant
A	C	C	B	A	B
C	A	B	A	B	C
B	B	A	C	C	A

Points		Scores	
2	A	101	
1	B	33	
0	C	109	

A meilleur que C : 41 sur 81

Procédure 4 : Borda

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane

7 votants:

3 votants	2 votants	2 votants	Points	
C	B	A		3
B	A	D		2
A	D	C		1
D	C	B		0

Scores		Classement
A	13	A
B	12	B
C	11	C
D	6	D

Procédure 4 : Borda

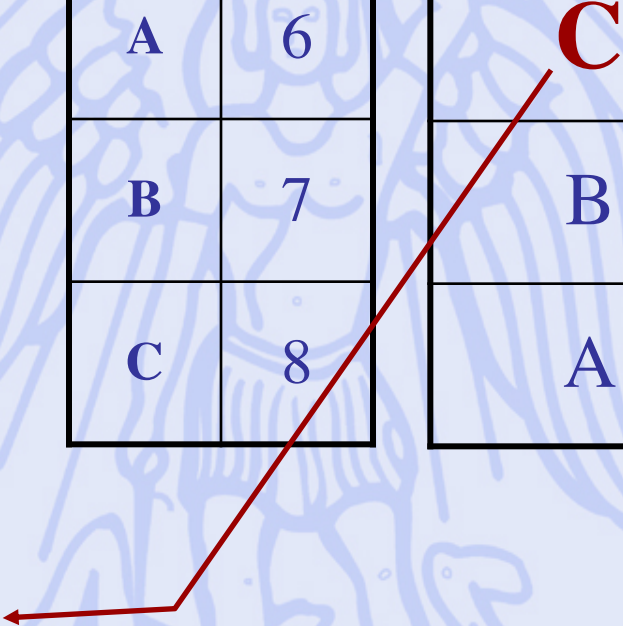
4 candidats: Albert, Bruno, Claire, ~~Diane~~

7 votants:

3 votants	2 votants	2 votants	Points	
C	B	A		2
B	A	C		1
A	C	B		0

Scores		Classement
A	6	C
B	7	B
C	8	A

Claire est élue



Borda (manipulation)

3 candidats: Albert, Bruno, Claire

34 votants:

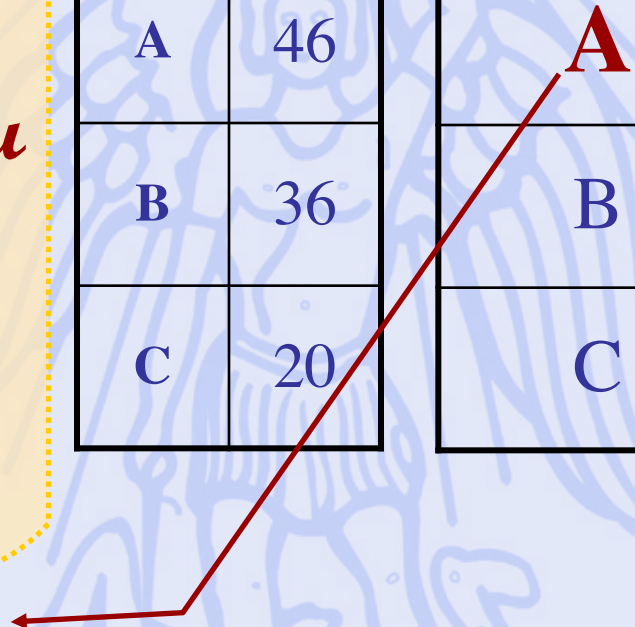
12	12	10	Points
A	B	C	
B	A	A	
C	C	B	0

Les partisans de Bruno suscitent la candidature du candidat x (« candidat bidon »)

Scores	
A	46
B	36
C	20

Classement
A
B
C

Albert est élu



Borda (manipulation)

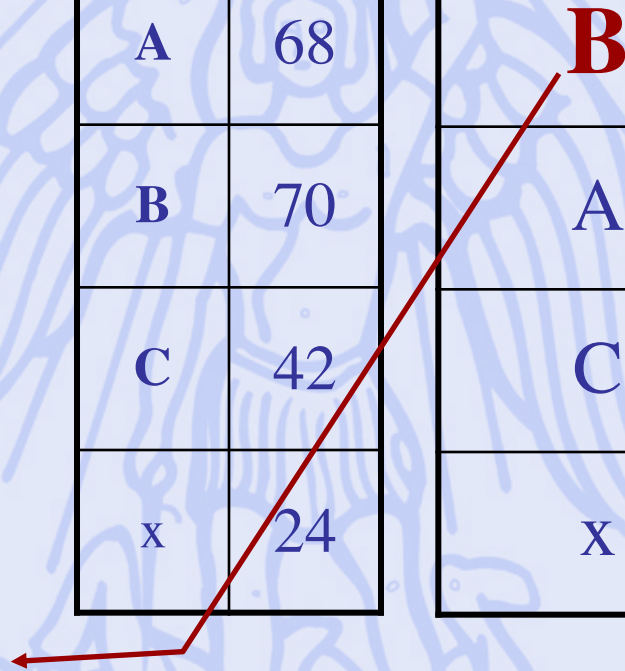
4 candidats: Albert, Bruno, Claire, x

34 votants:

12 votants	12 votants	10 votants	Points
A	B	C	3
B	x	A	2
C	A	B	1
x	C	x	0

Scores		Classement
A	68	B
B	70	A
C	42	C
x	24	x

Bruno est élu!



Borda (manipulation)

4 candidats: Albert, Bruno, Claire, x

34 votants:

12 votants	12 votants	10 votants	Points
A	B	C	3
x	x	x	2
B	A	A	1
C	C	B	0

Scores		Classement
A	58	X
B	48	A
C	30	B
x	68	C

Le candidat « bidon » est élu!

Procédure 5 :

Eliminations successives

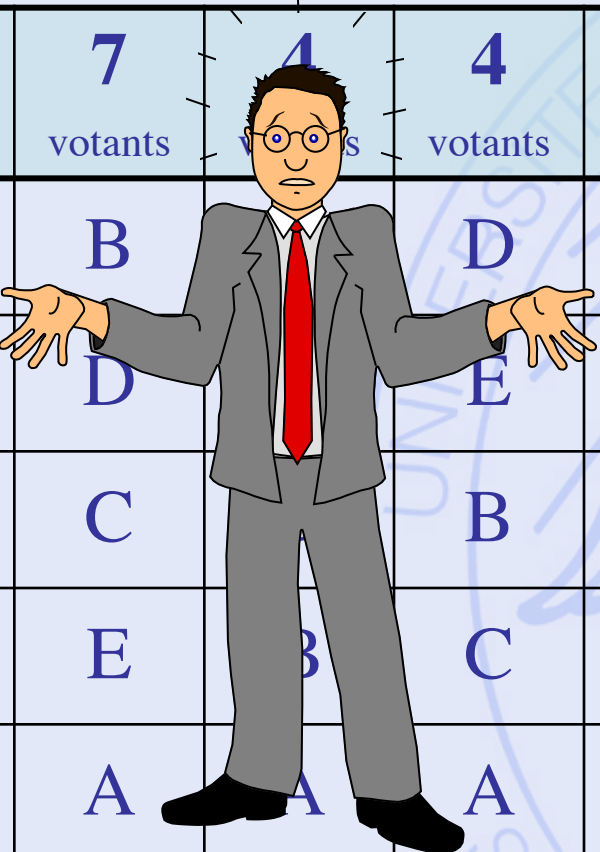
- Procédure par tours.
- Principe :
Eliminer à chaque tour le moins bon candidat, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un.

En conclusion ?

5 candidats: Albert, Bruno, Claire, Diane, Eric

25 votants:

8 votants	7 votants	4 votants	4 votants	2 votants
A	B	D	D	C
C	D	E	E	E
D	C	B	B	D
B	E	C	C	B
E	A	A	A	A



Majorité relative:

↳ **Albert est élu**

Procédure française:

↳ **Bruno est élu**

Procédure de Condorcet:

↳ **Claire est élue**

Procédure de Borda:

↳ **Diane est élue**

Eliminations successives:

↳ **Eric est élu**

Kenneth Arrow

(Nobel d'économie, 1972)

- **Théorème d'impossibilité (1952) :**
Avec au moins 2 votants et 3 candidats, il est impossible de construire une procédure de vote satisfaisant simultanément les 5 propriétés suivantes :
 - Non-dictature.
 - Universalité.
 - Indépendance vis-à-vis des tiers.
 - Monotonicité.
 - Non-imposition.

Méthodes de Surclassement

- Principe de majorité
(Cf théorie du choix social)
- Comparaisons par paires des actions.

Méthodes d'Aide à la Décision

- Information supplémentaire :

Perception des échelles

Pondération des critères

- Procédure d'analyse :

Approche prescriptive : **PROMETHEE**

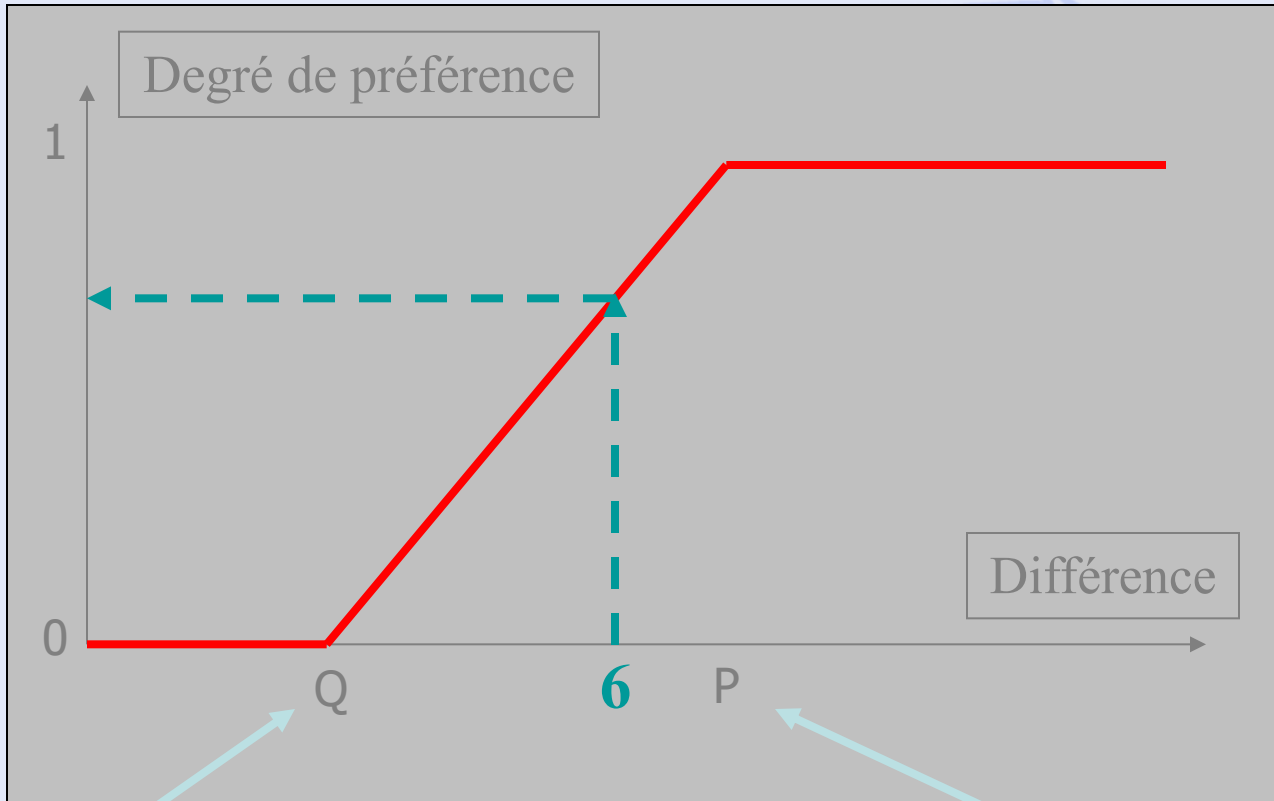
Approche descriptive : **GAIA**



Comparaison de 2 Actions

	Crit. 1 (/20)	Crit. 2 (cote)	Crit. 3 (appréc.)	Crit. 4 (O/N)	...
Action 1	18	135	B	Oui	...
Action 2	9	147	Différence = 6		...
Action 3	15	129	TB	Non	...
Action 4	12	146	TM	?	...
Action 5	7	121	B	Oui	...
...

Fonctions de Préférence



Seuil d'indifférence

Linéaire

Seuil de préférence

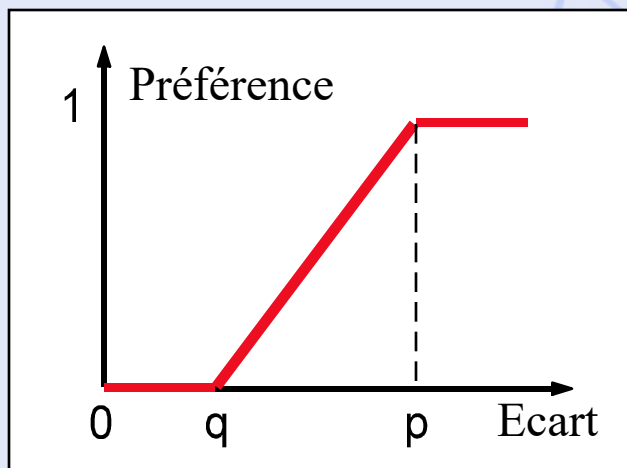
PROMETHEE

	Economic		Luxe 1	
<u>-230000</u>	250000	<i>Prix</i>	480000	
	50	<i>Puissance</i>	90	<u>+40</u>
<u>-1,0</u>	7,5	<i>Consomm.</i>	8,5	
	2	<i>Habitabilité</i>	4	<u>+2</u>
	1	<i>Confort</i>	5	<u>+4</u>



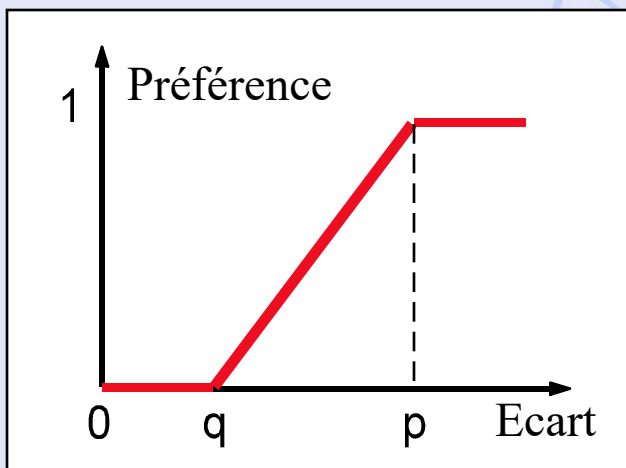
PROMETHEE

		Economic		Luxe 1		
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000		
		50	Puissance	90	<u>+40</u>	1,0
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5		
		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>	0,5
		1	Confort	5	<u>+4</u>	1,0



PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)	Economic		Luxe 1	Préf (Lux.,Eco.)	
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000	0,0
0,0		50	Puissance	90	<u>+40</u>
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5	0,0
0,0		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>
0,0		1	Confort	5	<u>+4</u>
					1,0

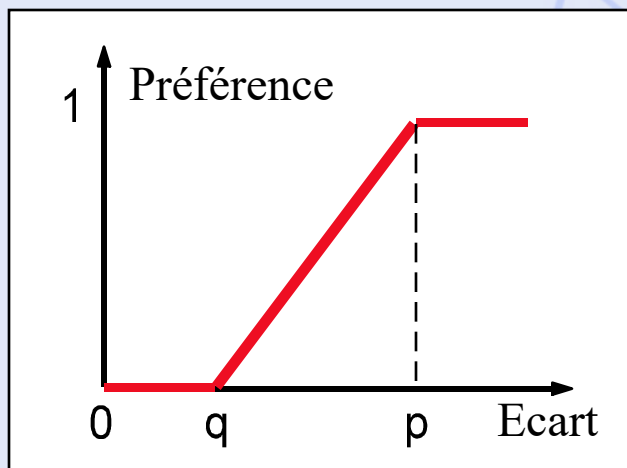


PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)

Préf (Lux.,Eco.)

		Economic		Luxe 1			Poids
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000		0,0	1
0,0		50	Puissance	90	<u>+40</u>	1,0	1
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5		0,0	1
0,0		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>	0,5	1
0,0		1	Confort	5	<u>+4</u>	1,0	1



$$\square \text{Préf (Eco.,Lux.)} = 0,3$$

$$= (1 + 0 + 0,5 + 0 + 0) / 5$$

$$\square \text{Préf (Lux.,Eco.)} = 0,5$$

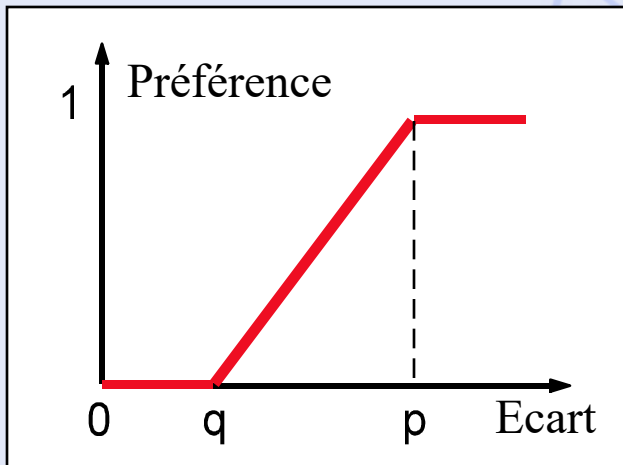
$$= (0 + 1 + 0 + 0,5 + 1) / 5$$

PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.)

Préf (Lux.,Eco.)

		Economic		Luxe 1			Poids
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000		0,0	2
0,0		50	Puissance	90	<u>+40</u>	1,0	1
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5		0,0	2
0,0		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>	0,5	1
0,0		1	Confort	5	<u>+4</u>	1,0	1



□ $\text{Préf (Eco.,Lux.)} = 0,43$

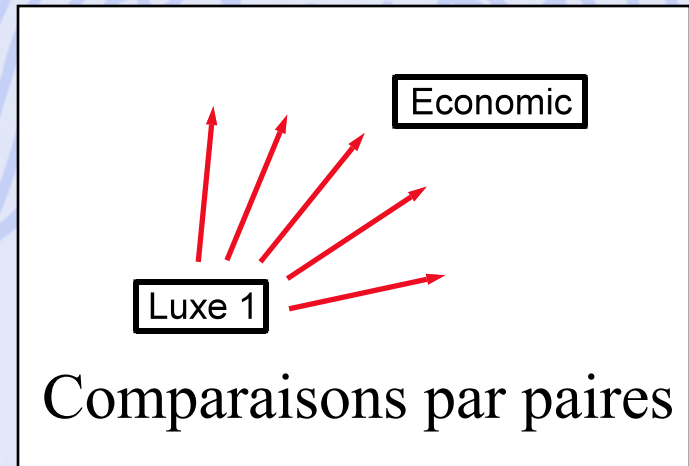
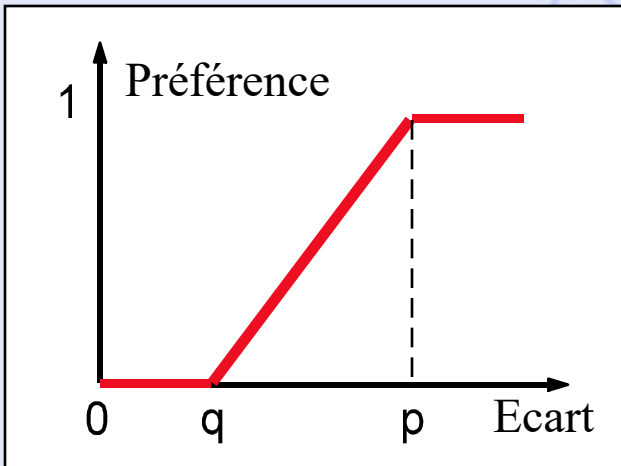
$= (2 \times 1 + 0 + 2 \times 0,5 + 0 + 0) / 7$

□ $\text{Préf (Lux.,Eco.)} = 0,36$

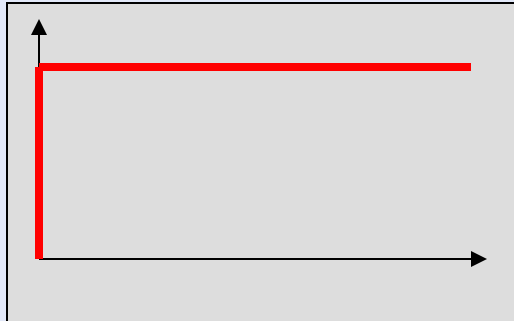
$= (0 + 1 + 0 + 0,5 + 1) / 7$

PROMETHEE

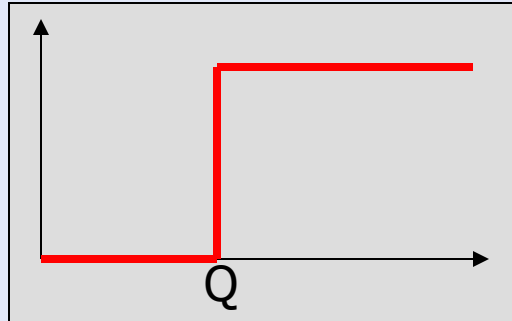
Préf (Eco.,Lux.)	Economic		Luxe 1	Préf (Lux.,Eco.)	
1,0	<u>-230000</u>	250000	Prix	480000	0,0
0,0		50	Puissance	90	<u>+40</u>
0,5	<u>-1,0</u>	7,5	Consomm.	8,5	0,0
0,0		2	Habitabilité	4	<u>+2</u>
0,0		1	Confort	5	<u>+4</u>



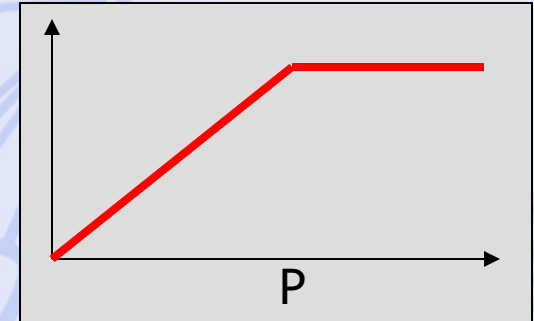
Fonctions de Préférence



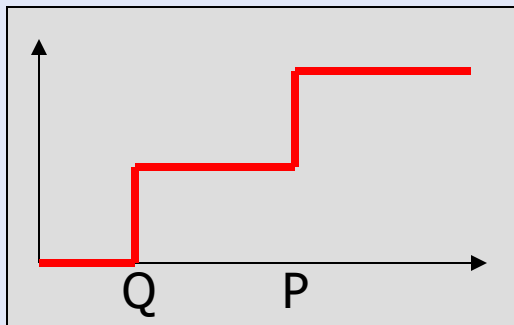
Critère usuel



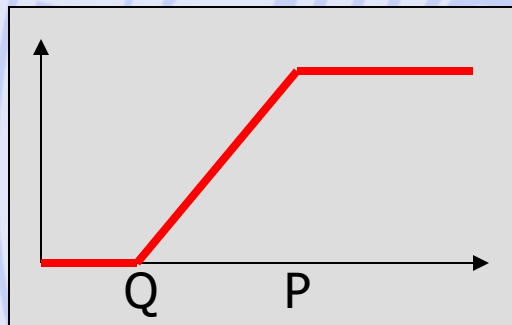
Critère en « U »



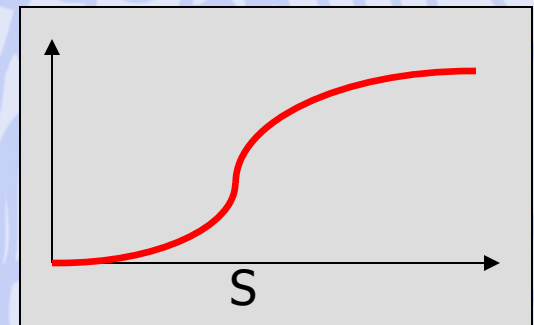
Critère en « V »



Critère à palier



Critère linéaire



Critère Gaussien

Comparaisons par Paires

- Pour chaque critère g_j :
 - Fonction de préférence P_j
 - Poids w_j
- Degré de préférence multicritère de a sur b :

$$\pi(a, b) = \sum_{j=1}^k w_j P_j(a, b)$$

Matrice des $\pi(a,b)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00						
<i>Sport</i>		0,00					
<i>Moy.B</i>			0,00				
<i>Lux.1</i>				0,00	0,50		
<i>Econ.</i>				0,30	0,00		
<i>Lux.2</i>						0,00	
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

Matrice des $\pi(a,b)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^+(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^+(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^-(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^-(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

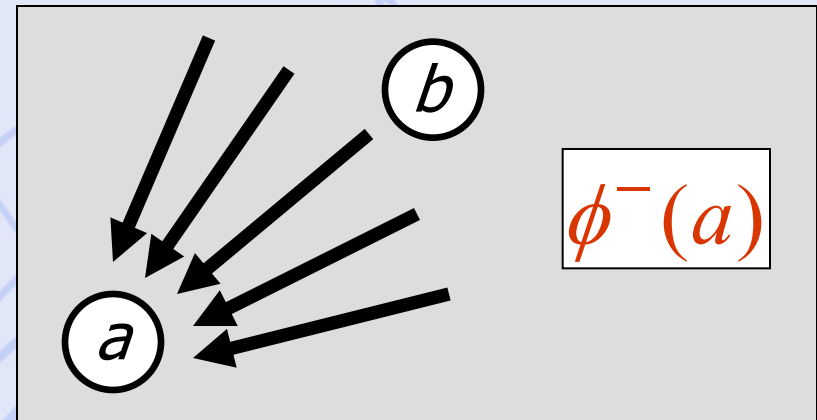
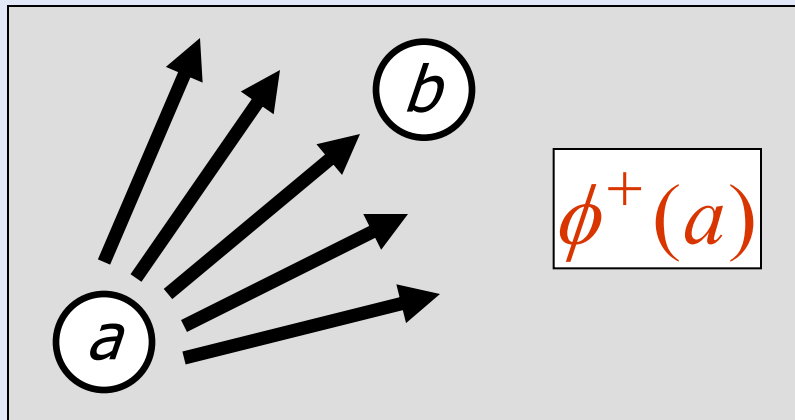
Calcul de $\phi(a)$

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

Calcul des flux de préférence

$\pi(a,b)$	<i>Moy.A</i>	<i>Sport</i>	<i>Moy.B</i>	<i>Lux.1</i>	<i>Econ.</i>	<i>Lux.2</i>	$\phi^+(a)$
<i>Moy.A</i>	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
<i>Sport</i>	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
<i>Moy.B</i>	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
<i>Lux.1</i>	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
<i>Econ.</i>	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
<i>Lux.2</i>	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

Flux de Préférence



- Flux sortant :
(puissance)
- Flux entrant :
(faiblesse)
- Flux net :

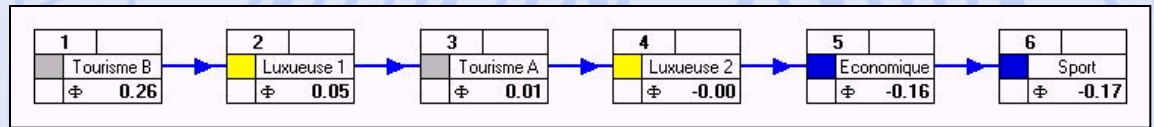
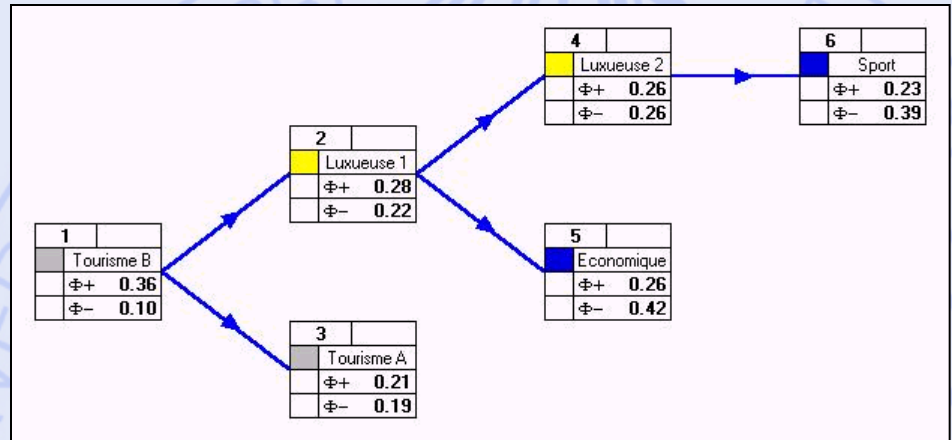
$$\phi^+(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(a, b)$$

$$\phi^-(a) = \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(b, a)$$

$$\phi(a) = \phi^+(a) - \phi^-(a)$$

PROMETHEE

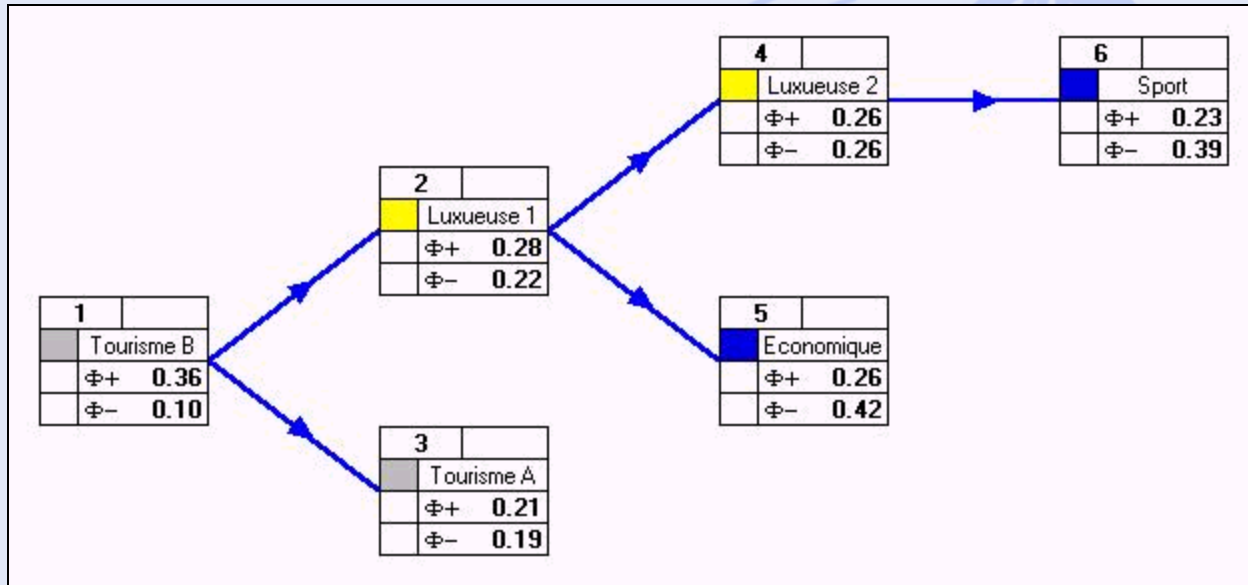
- Classer les décisions de la meilleure à la moins bonne
- Mettre en évidence les meilleurs compromis



PROMETHEE

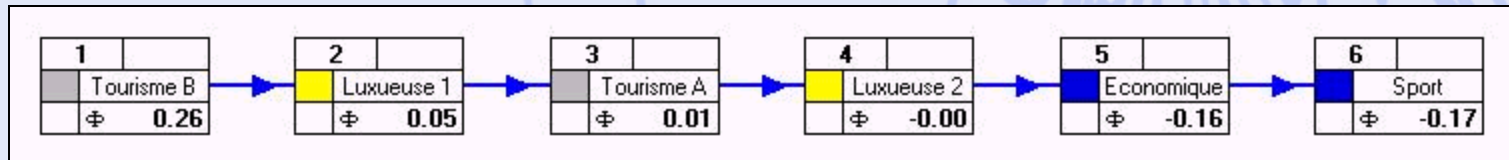
- PROMETHEE I : classement partiel

ϕ^+, ϕ^-



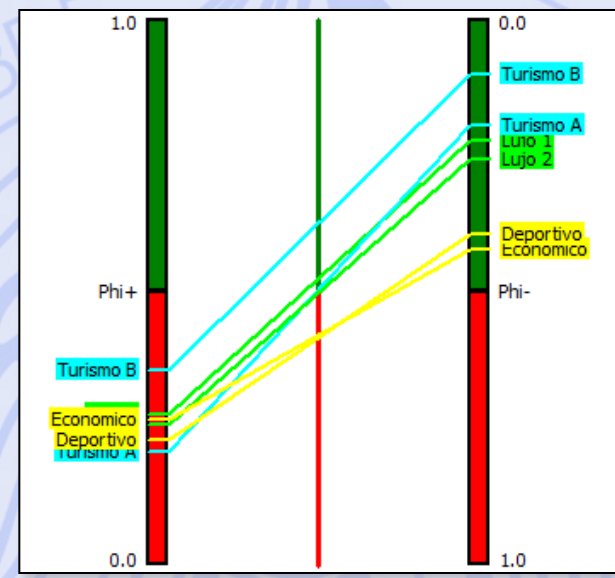
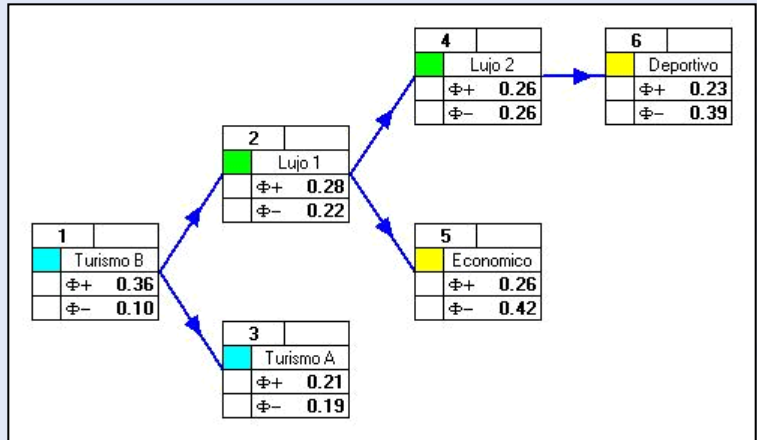
- PROMETHEE II : classement complet

ϕ

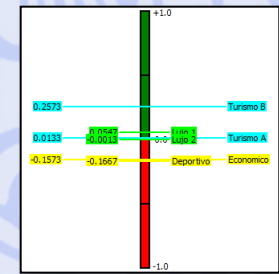
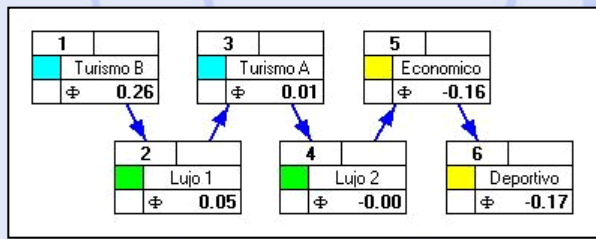


PROMETHEE I & II

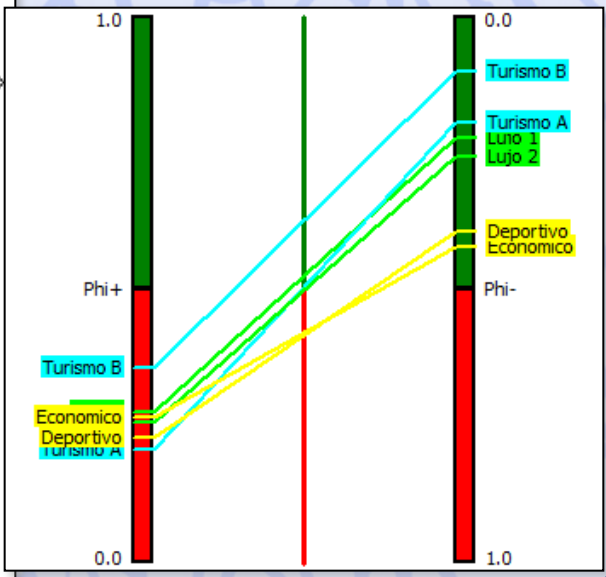
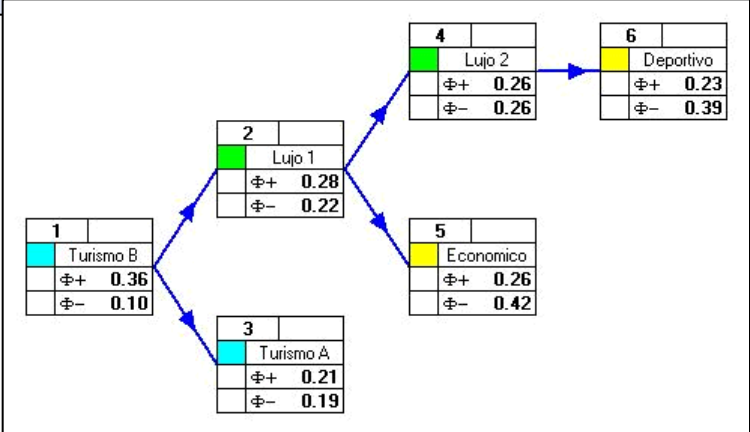
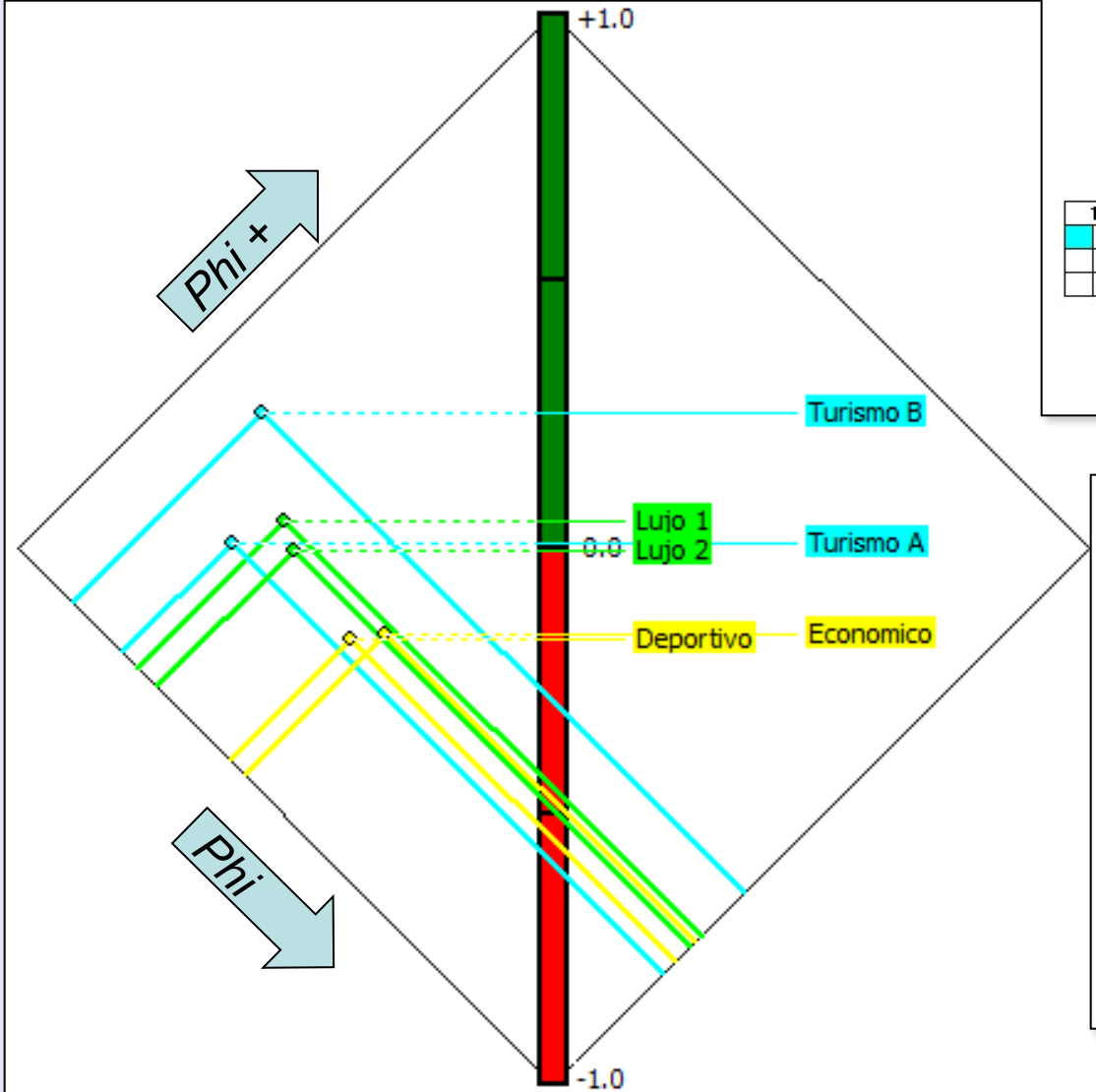
- PROMETHEE I : classement partiel - ϕ^+, ϕ^-



- PROMETHEE II : classement complet - ϕ



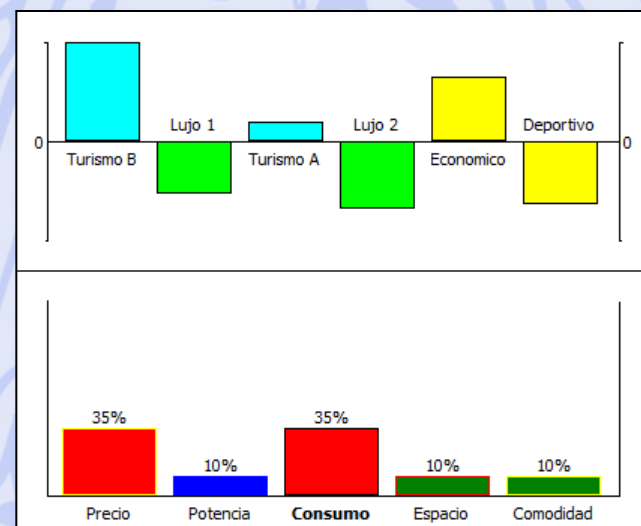
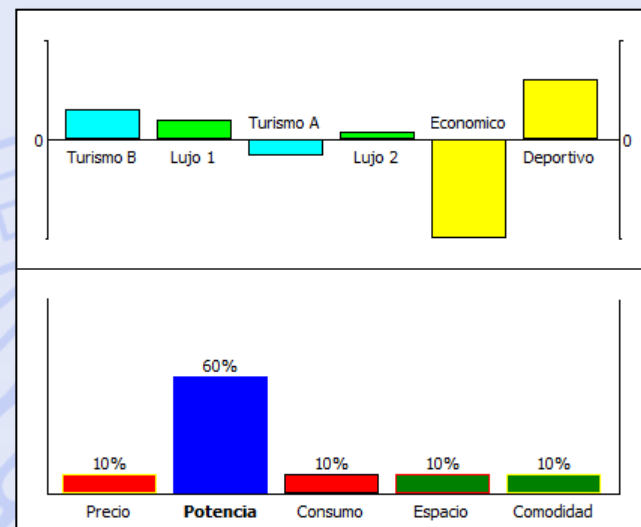
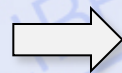
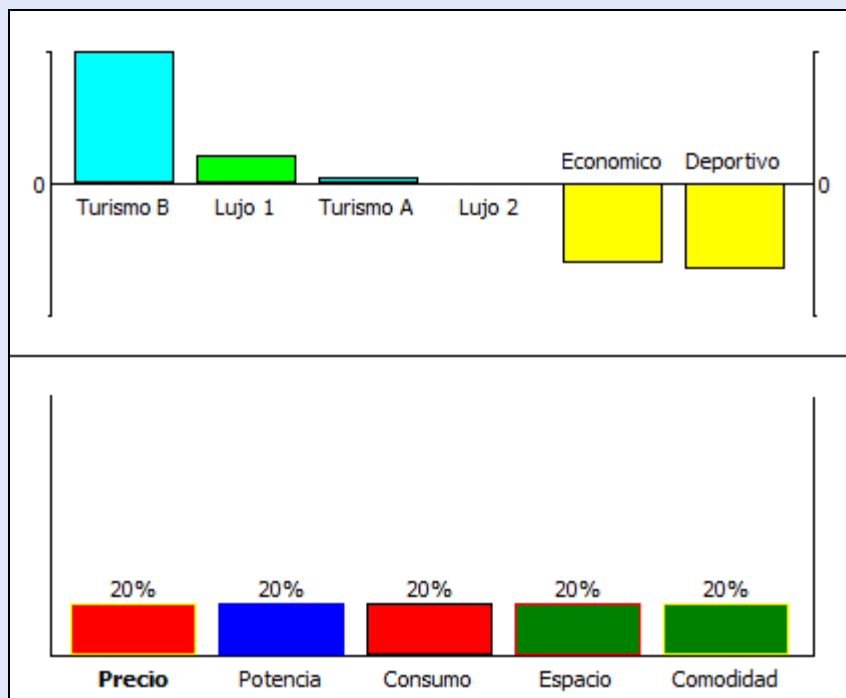
Diamant PROMETHEE



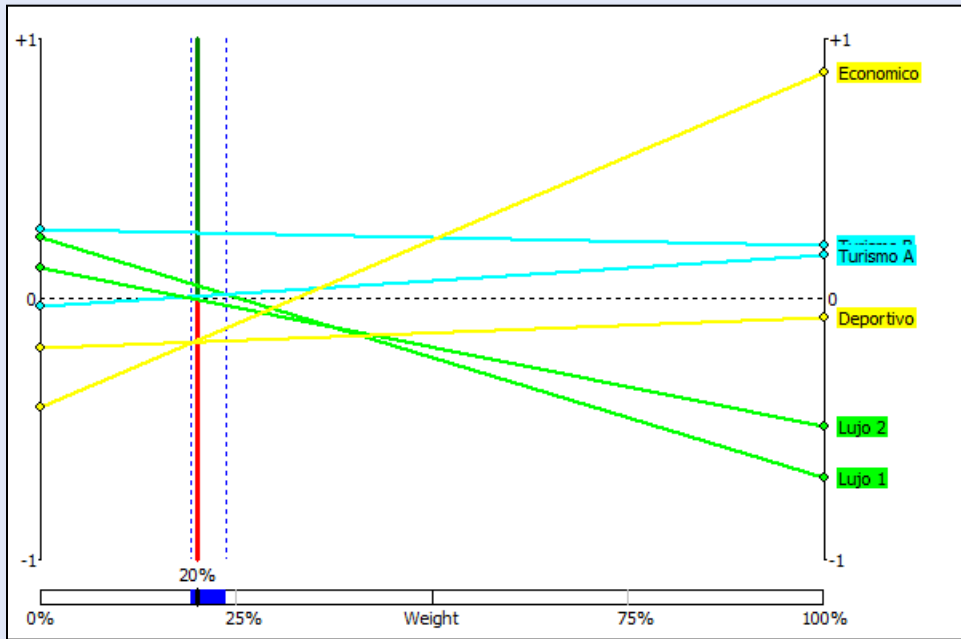
Analyse de Sensibilité avec PROMETHEE

- Poids des critères \leftrightarrow classement PROMETHEE.
- Analyse de sensibilité interactive :
« Walking Weights ».
- Robustesse par rapport aux poids ?
 - Intervalles de stabilité.
 - Intervalles de stabilité visuels.

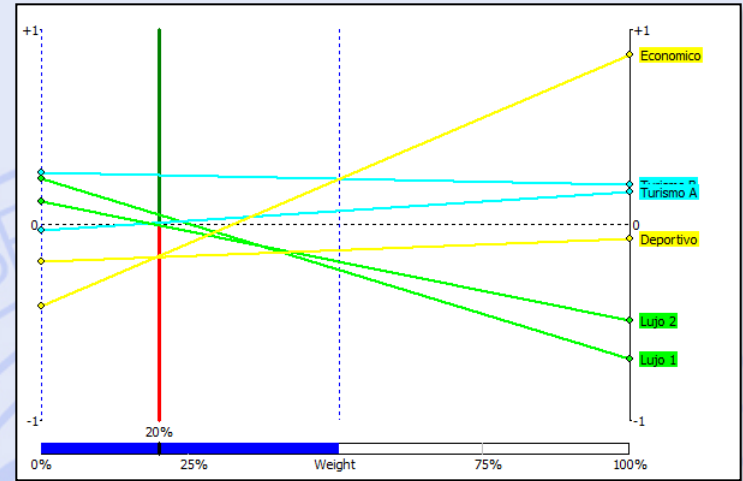
Walking Weights



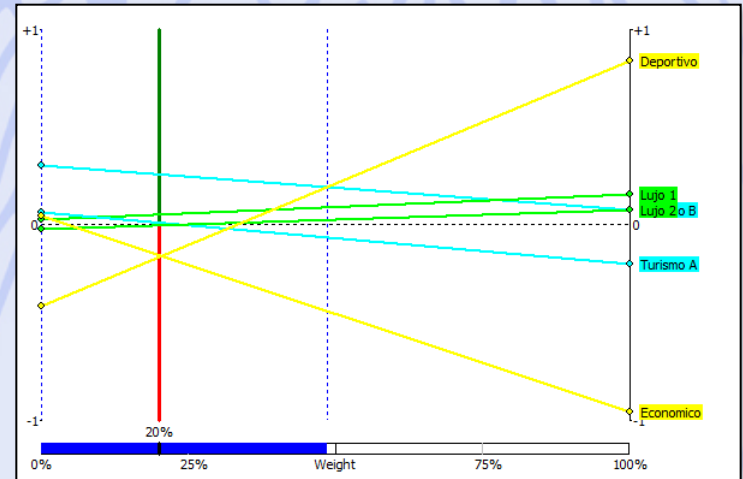
Visual Stability Intervals



VSI pour « Prix » (niveau 6):
[19.20% , 23.70%]

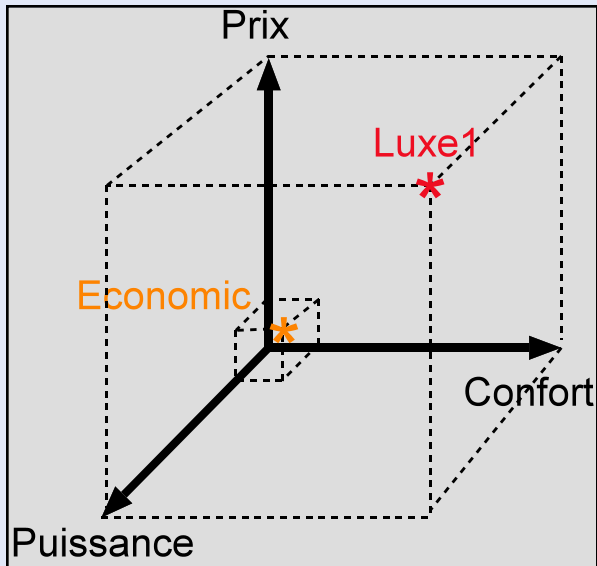


VSI pour « Prix » (niv. 1): [0.00% , 50.68%]



VSI pour « Puissance » (niv. 1): [0.00% , 48.65%]

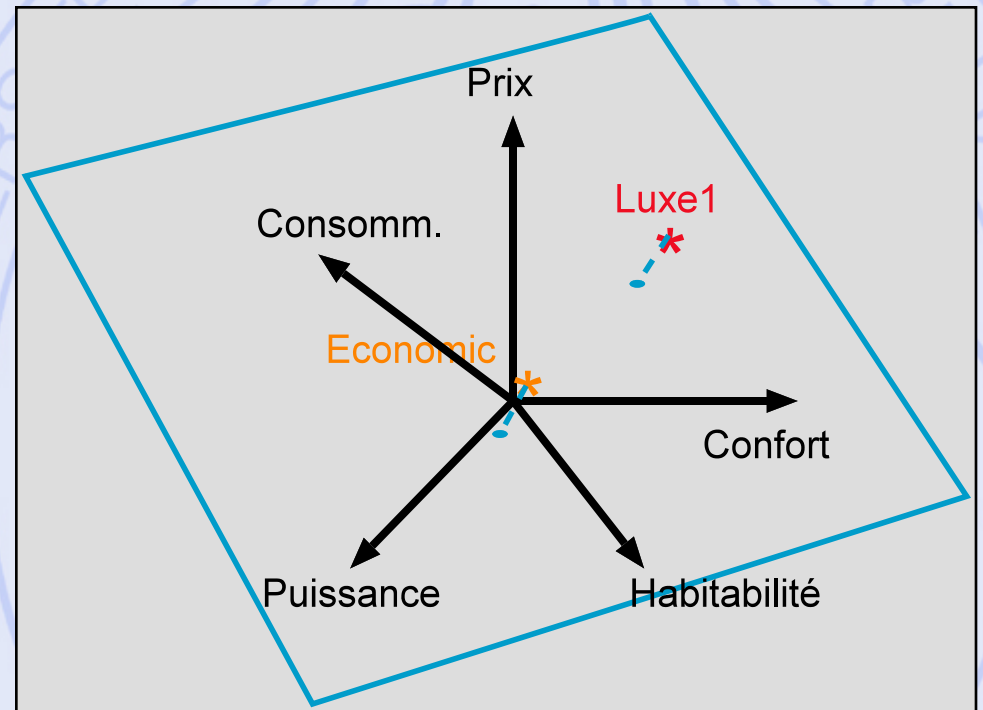
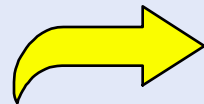
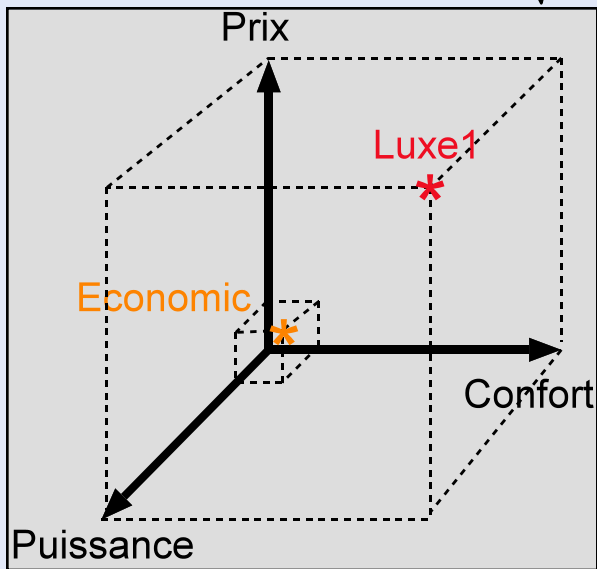
GAIA



- Représentation graphique.
- 5 dimensions !

GAIA

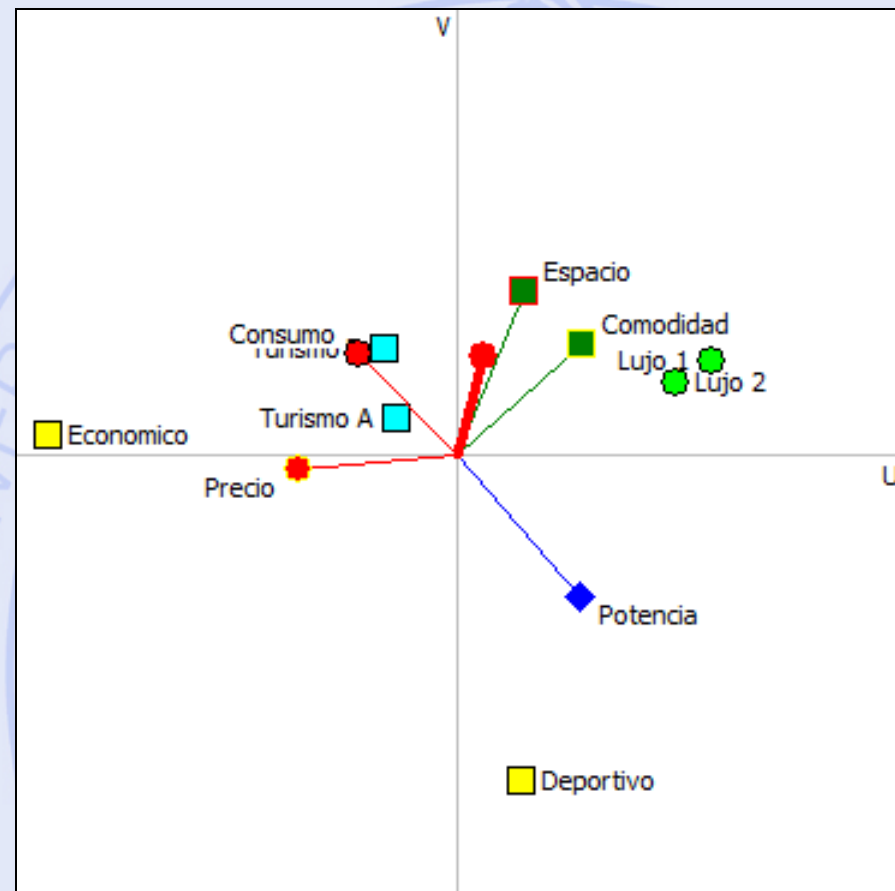
1. *Calcul des flux nets unicritères (normalisation)*
2. *Projection sur un plan :*



- Représentation graphique.
- 5 dimensions !

GAIA

- Mettre en évidence les conflits entre critères.
- Identifier les compromis possibles.
- Aider à fixer les priorités.

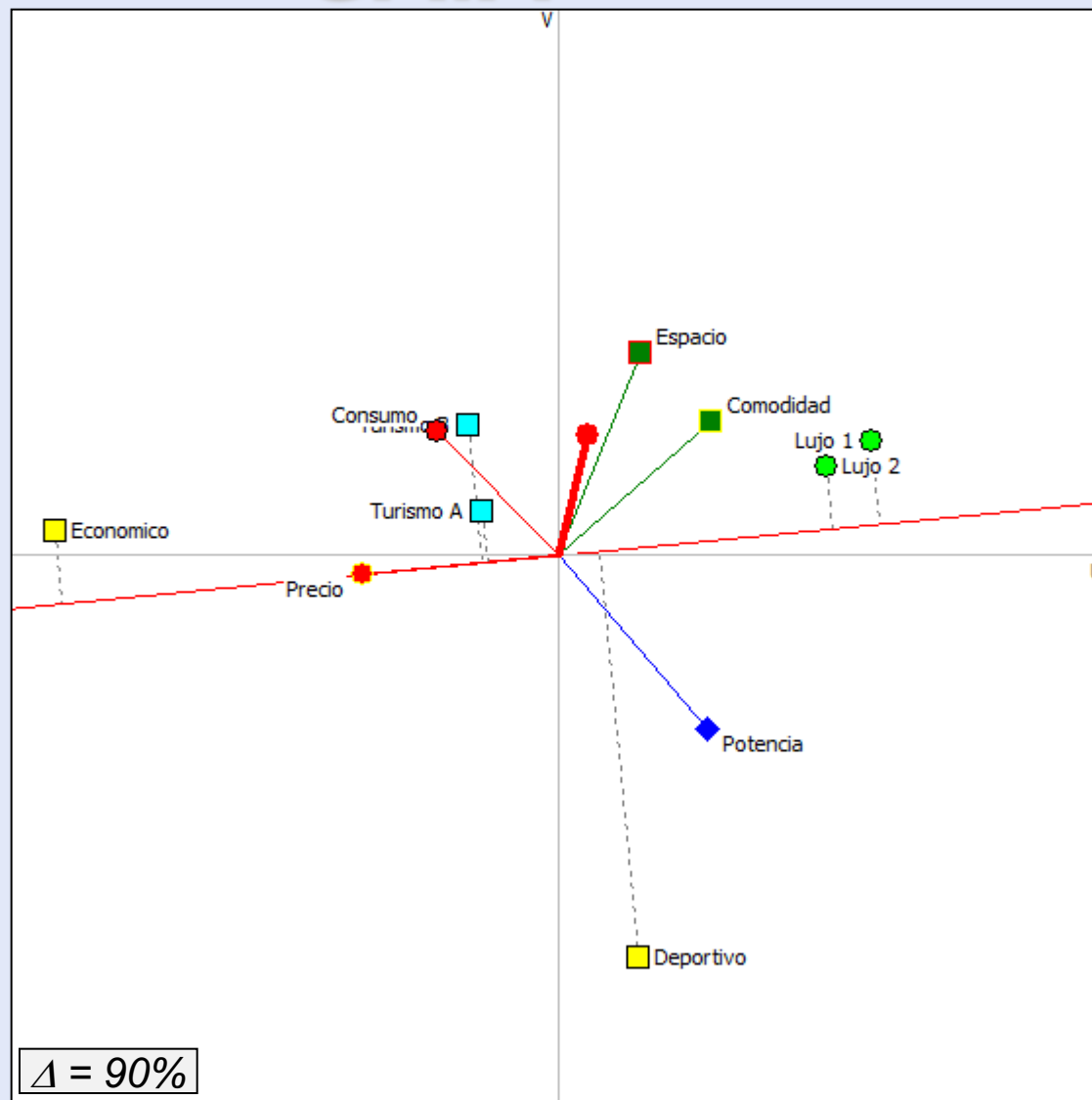


GAIA



- *Actions :*
points
- *Critères :*
axes

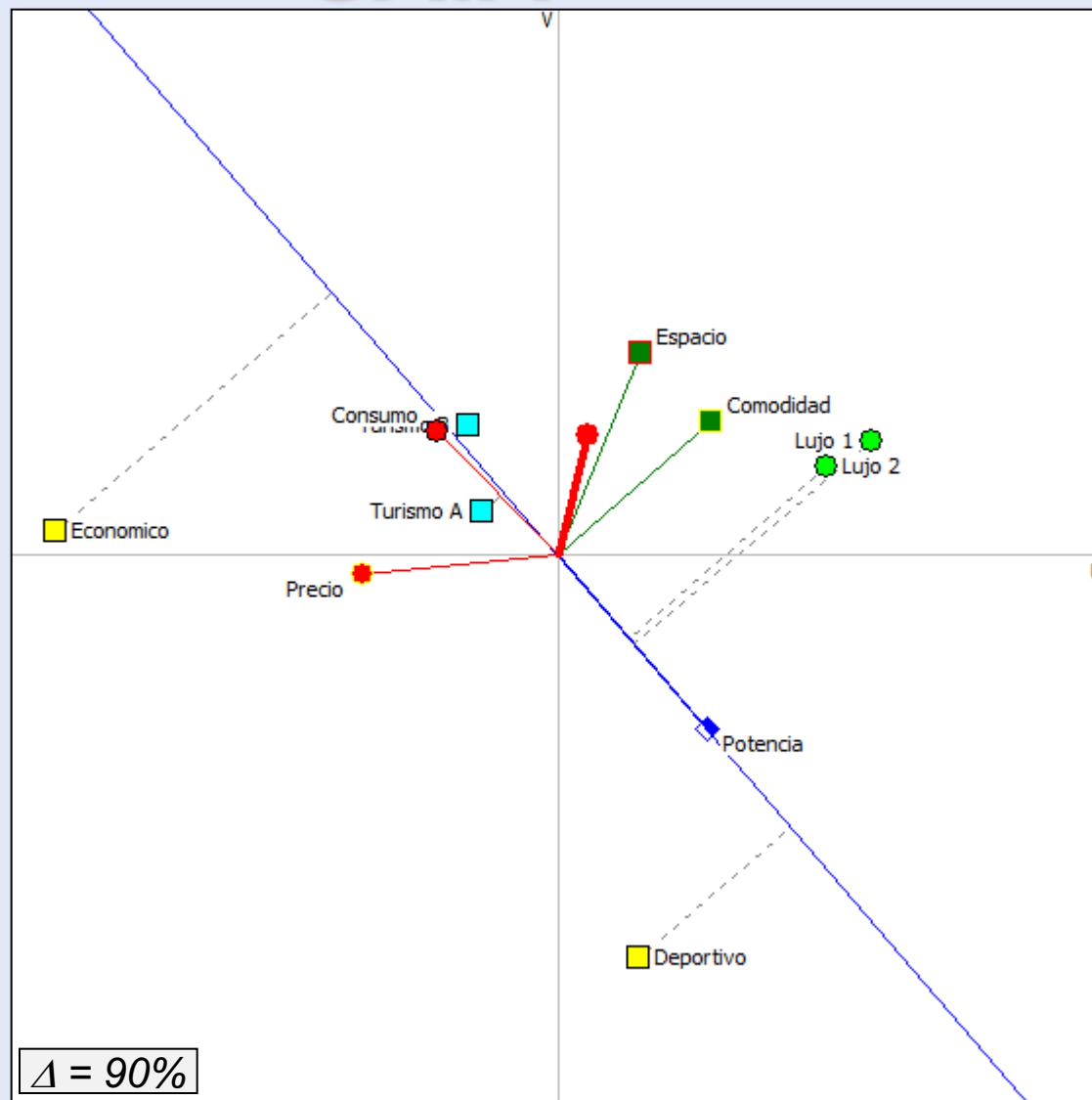
GAIA



Prix

- *Economico: 15 k€*
- *Turismo: 25,5-26 k€*
- *Deportivo: 29 k€*
- *Lujo: 35-38 k€*

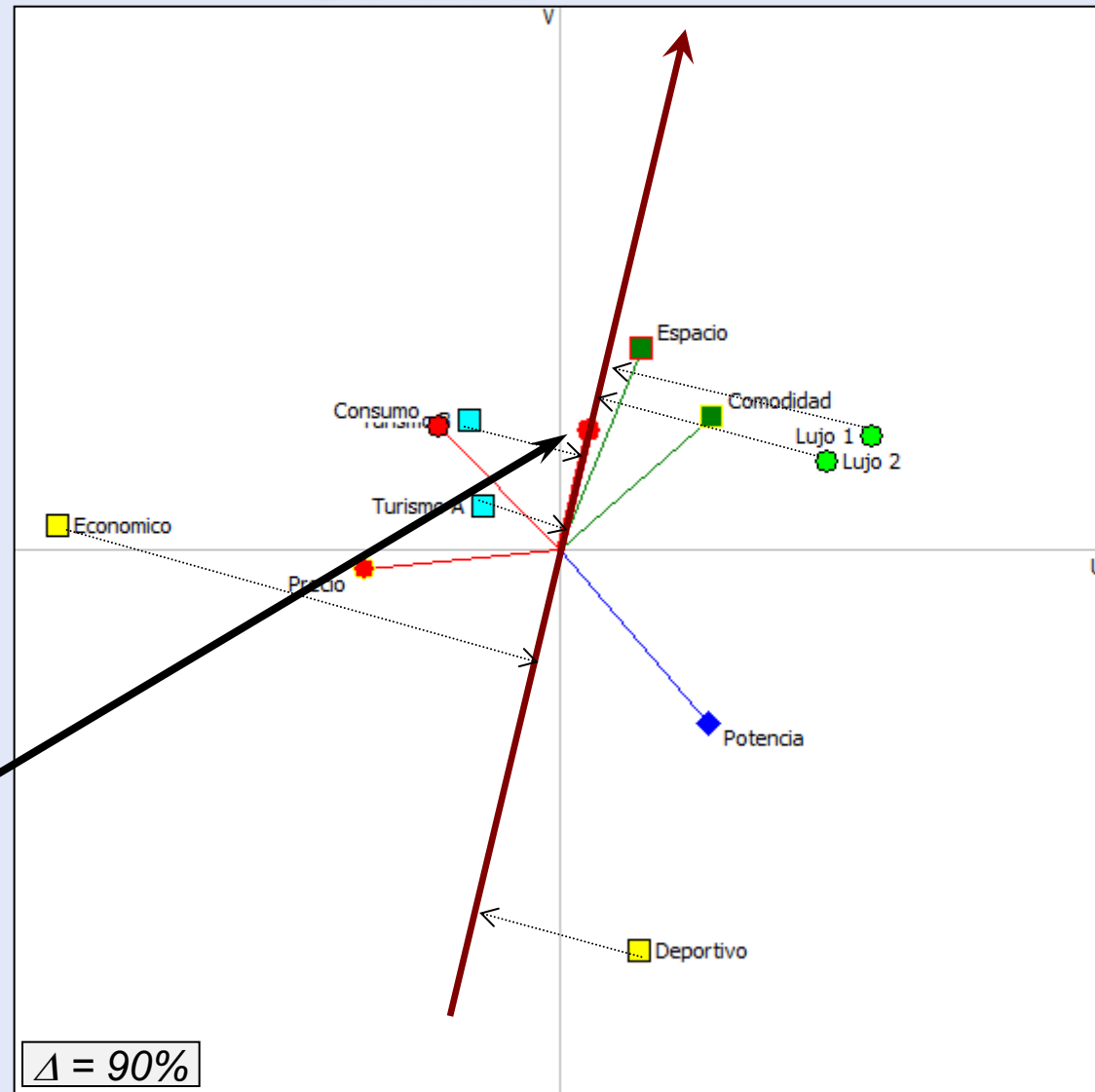
GAIA



Puissance

- *Deportivo: 110 kW*
- *Lujo: 85-90 kW*
- *Turismo: 75-85 kW*
- *Economico: 50 kW*

GAIA



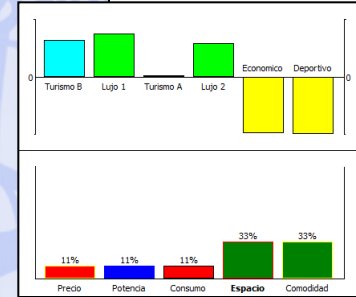
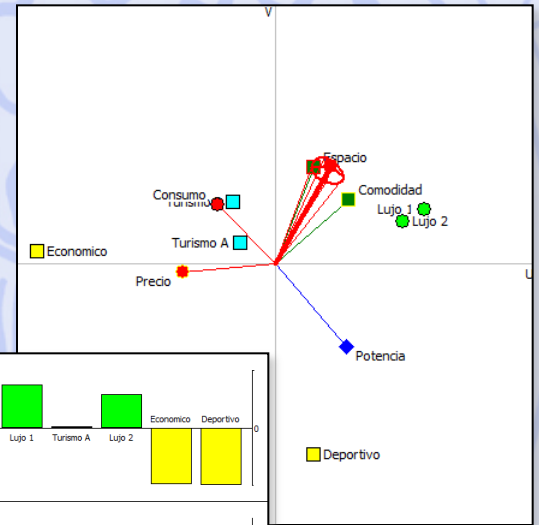
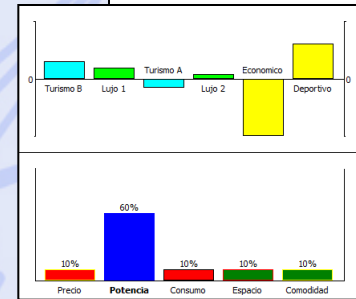
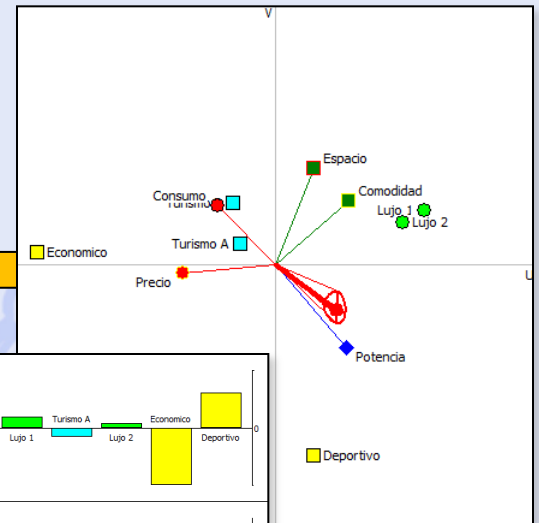
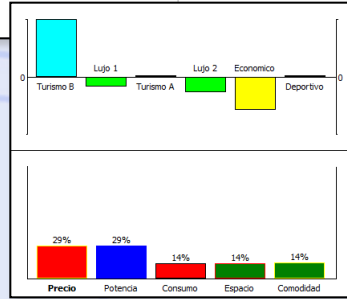
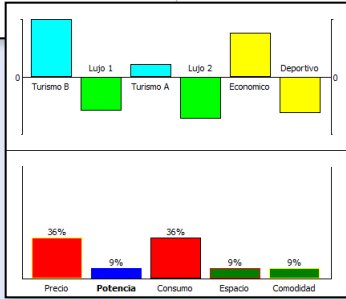
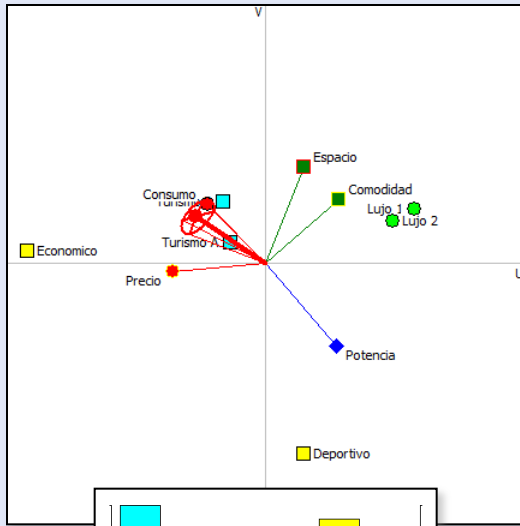
PROMETHEE II !

- Turismo B : 0,26
- Lujo 1 : 0,06
- Turismo A : 0,02
- Lujo 2 : 0,00
- Economico : -0,15
- Deportivo : -0,17

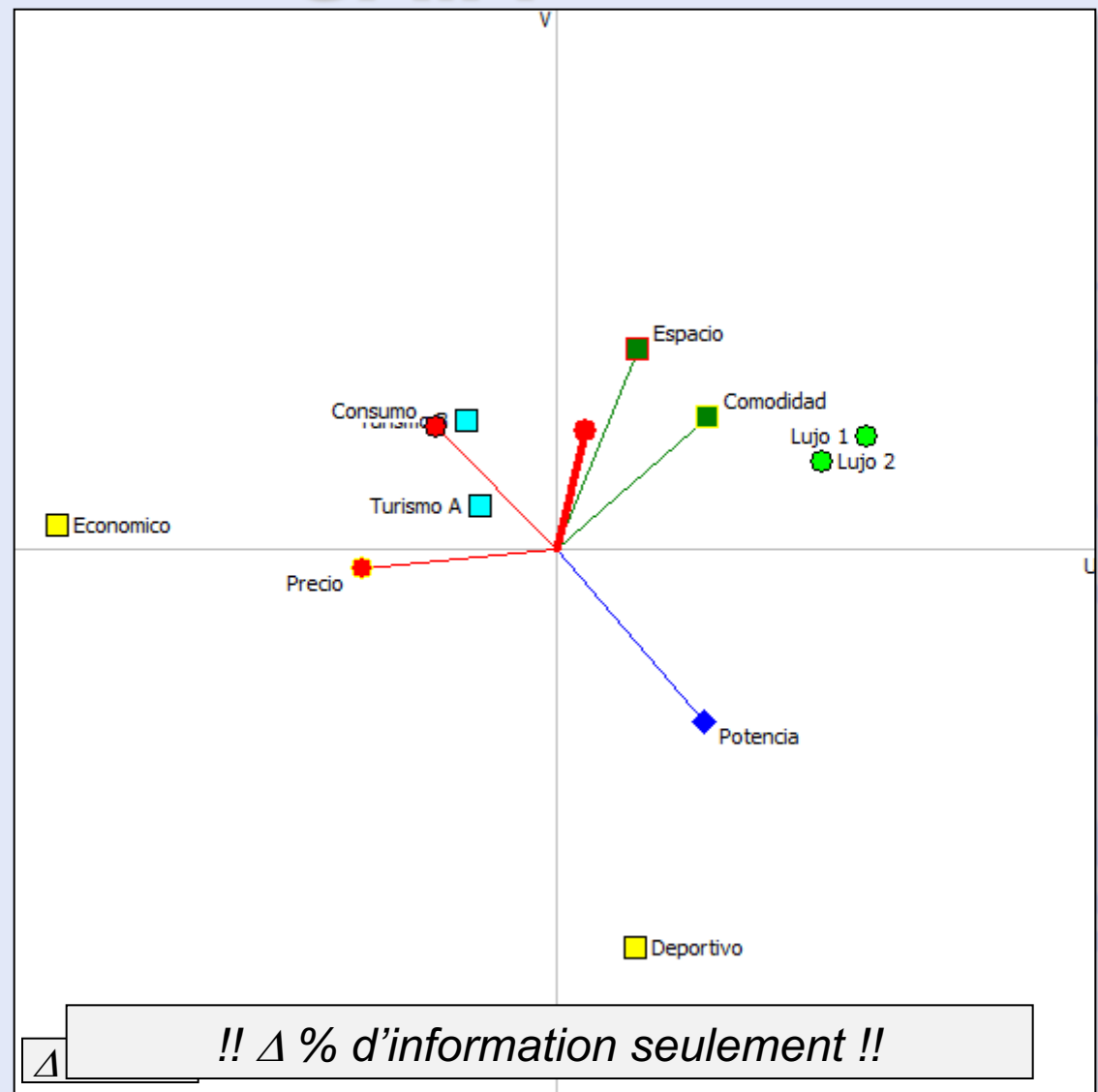
GALA-Brain

20 ans

35 ans

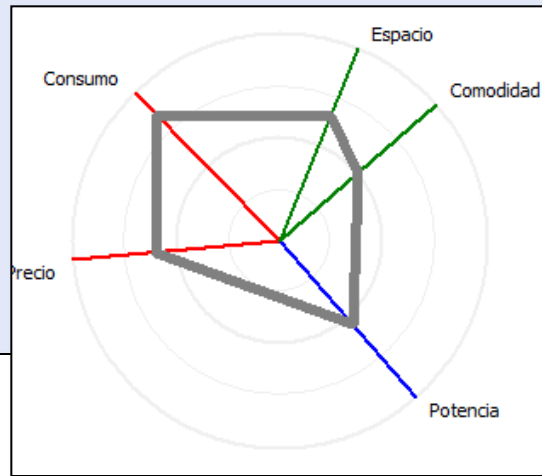
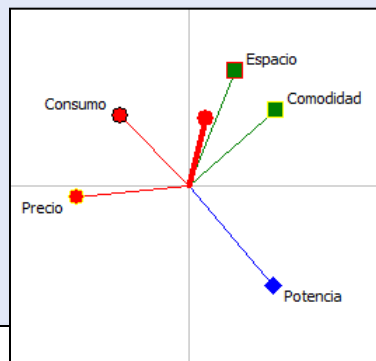


GAIA

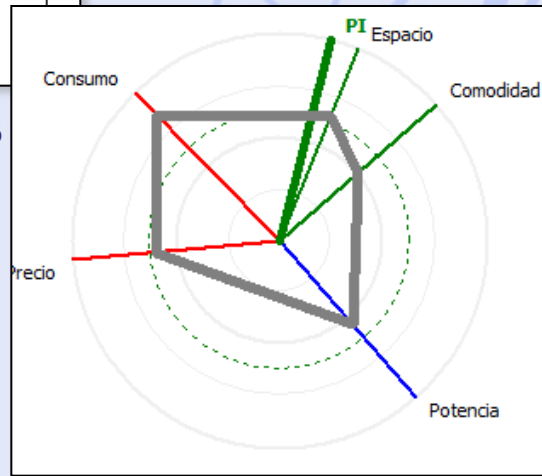


- *Actions :*
points
- *Critères :*
axes
- *Axe de décision*

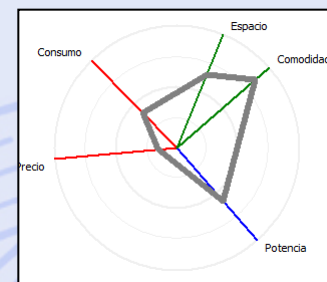
GAIA Webs



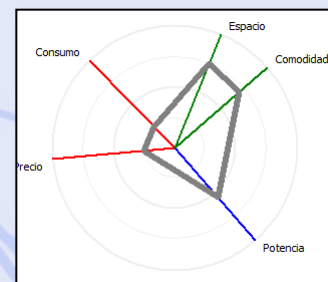
GAIA Web - Turismo B



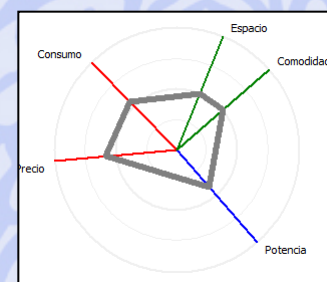
Action profile - Turismo B



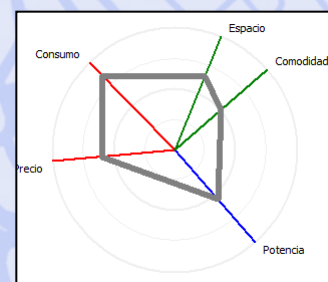
Lujo 1



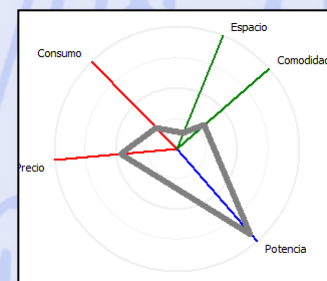
Lujo 2



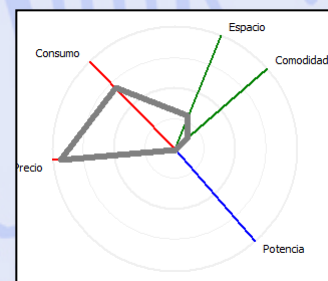
Turismo A



Turismo B



Deportes



Economico

Méthodes PROMETHEE & GAIA

- PROMETHEE : approche prescriptive
 - Classement partiel des actions
 - PROMETHEE I
 - Classement complet des actions
 - PROMETHEE II
- GAIA : approche descriptive
 - Identification des conflits entre critères.
 - Profils caractéristiques des actions.
 - Fixer les priorités, analyse de sensibilité.

Exemple 2 :

Localisation d'une usine

- Actions : 5 sites potentiels
- Critères :
 - f_1 : Coût (investissement)
 - f_2 : Coût (opérations)
 - f_3 : Emploi
 - f_4 : Transport
 - f_5 : Impact sur l'environnement
 - f_6 : Impact social

Tableau d'Evaluation

	Investment	Operations	Employment	Transportation	Environment	Social
Min/Max	Minimize	Minimize	Minimize	Maximize	Minimize	Minimize
Weight	25.0000	15.0000	20.0000	20.0000	10.0000	10.0000
Preference Functi	Linear	Linear	Linear	Level	Level	Level
Indifference Thres	5.00 %	5.00 %	5.00 %	0.5000	0.5000	0.5000
Preference Thres	25.00 %	25.00 %	10.00 %	1.5000	1.5000	1.5000
Gaussian Thresho	-	-	-	-	-	-
Threshold Unit	Percent	Percent	Percent	Absolute	Absolute	Absolute
Unit	M\$	M\$	workers	5-point	Impact	Impact
Site 1	74.0000	12.0000	175.0000	Average	High	Low
Site 2	86.0000	9.0000	170.0000	Good	Low	Very Low
Site 3	89.0000	7.0000	145.0000	Very Good	Very Low	Moderate
Site 4	115.0000	8.0000	95.0000	Bad	Low	High
Site 5	128.0000	10.0000	110.0000	Good	Moderate	Very Low

- Critères à minimiser ou maximiser.
- Echelles différentes.
- Critères quantitatifs ou qualitatifs.

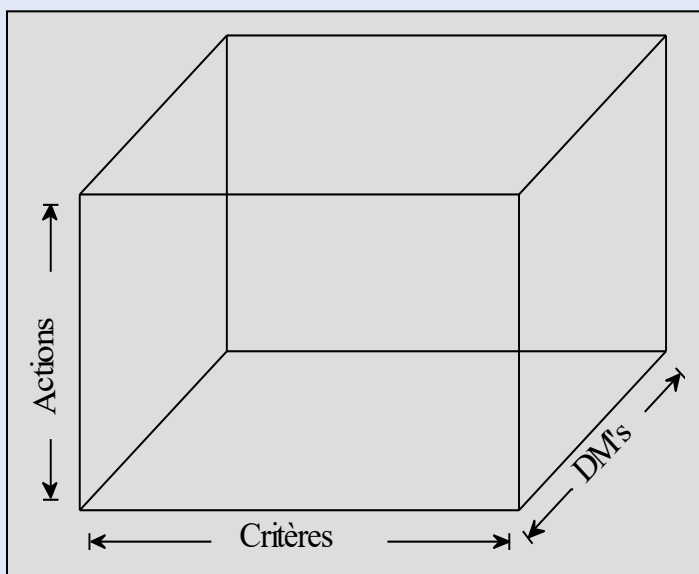
Problèmes de Décision Mono- et Multidécideur

- Monodécideur :
 - Une seule partie prenante dans le processus.
 - Evaluations et structure de préférence uniques.
- Multidécideur :
 - Plusieurs parties prenantes.
 - Evaluations et structures de préférences multiples.
 - Recherche d'un consensus.

Exemple

- Quatre parties prenantes (“décideurs”) :
 - Industriel,
 - Pouvoirs publics (région),
 - Associations de protection de l’environnement,
 - Syndicats.
- Quatre tableaux multicritères.

Matrice Multicritère



- Adapter les méthodes multicritères à la dimension multidécideur.
- Etudier les conflits entre décideurs.
- Aider à atteindre une solution de consensus.

Modèle Multi-scénarios

- Scénarios :
 - Points de vue,
 - Hypothèses de travail, ...
- Evaluations :
 - Critères 'objectifs' : évaluations communes.
 - Critères 'subjectifs' : évaluations particulières à chaque scénario.
- Structures de préférences différentes :
 - Poids, seuils de préférence.

Modèle Multi-scénarios

- Adaptation de PROMETHEE :
 - Classements individuels
 - Classements globaux (groupe) en tenant compte d'une pondération éventuelle des scénarios
- Adaptation de GAIA :
 - GAIA-Critères
 - GAIA-Scénarios
 - GAIA-Unicritère

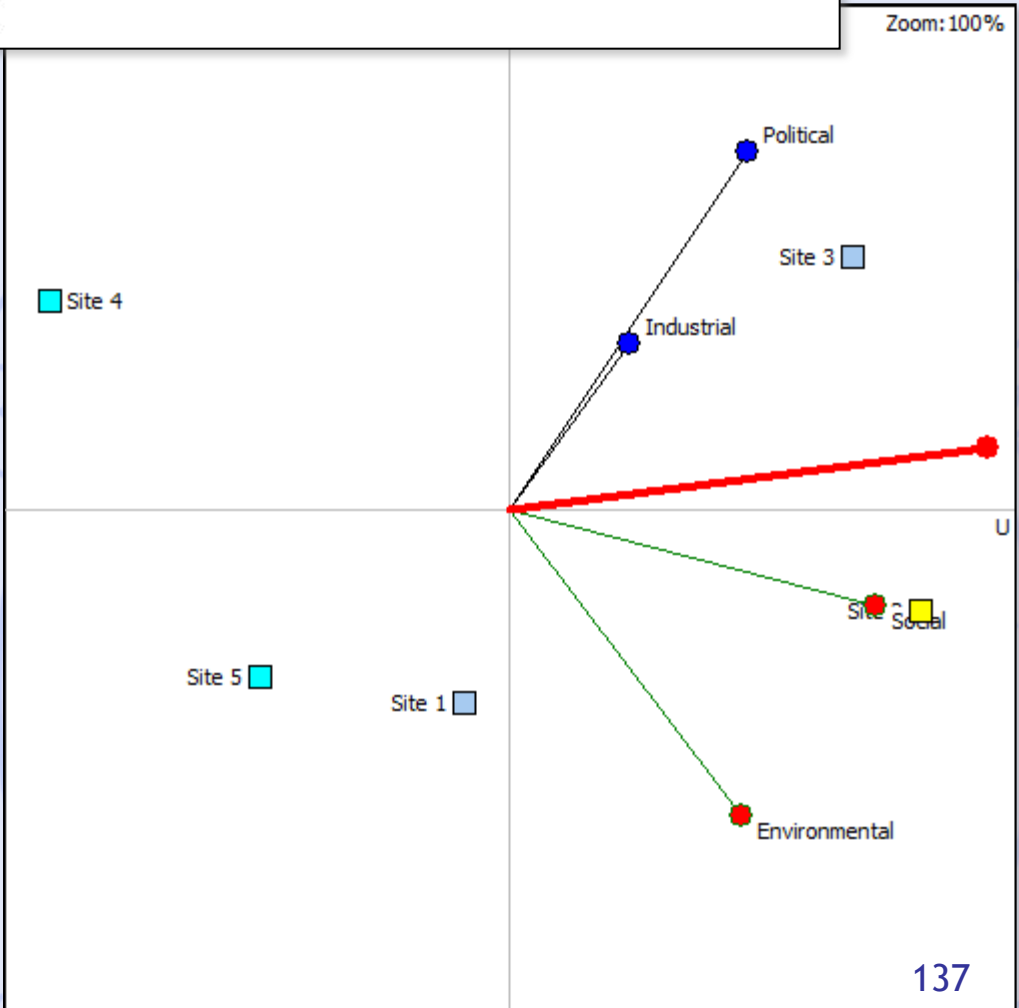
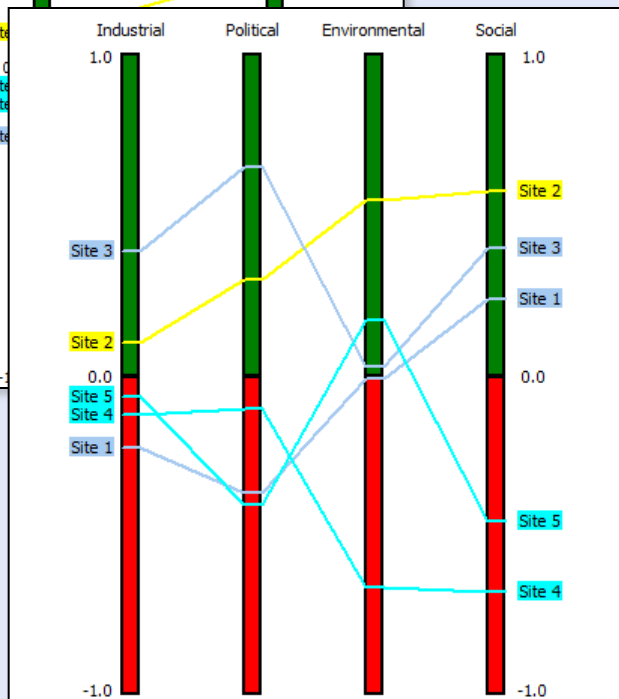
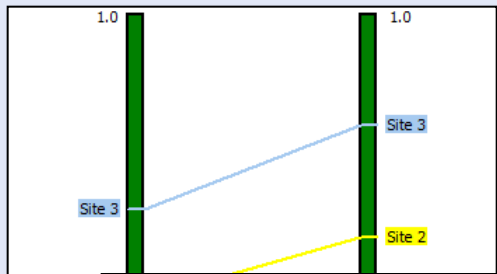
1	
Site 2	
$\phi+$	0.55
$\phi-$	0.18

2	
Site 3	
$\phi+$	0.58
$\phi-$	0.22

3	
Site 1	
$\phi+$	0.31
$\phi-$	0.42

4	
Site 5	
$\phi+$	0.26
$\phi-$	0.47

5	
Site 4	
$\phi+$	0.19
$\phi-$	0.61



Zoom: 100%

Visual PROMETHEE



WWW.PROMETHEE-GAIA.NET

- 3-level simple hierarchical criteria structure.
- New visual tools:
 - PROMETHEE rankings and Diamond,
 - Visual Weight Stability Intervals,
 - Decision-maker's Brain (PROMETHEE VI),
 - GAIA-3D,
 - GAIA-Webs and PROMap GIS integration,
 - Performance (input-output) analysis, ...

PROMap

- *Intégration avec Google Maps :*



Travail personnel

- Elaborer un problème de décision : min. 8 actions, 5 critères et 2 scénarios.
- Modéliser le problème avec PROMETHEE.
- Analyser le problème avec Visual PROMETHEE:
 - Classements PROMETHEE.
 - Analyse GAIA.
 - Analyse de sensibilité:
 - Poids des critères.
 - Différents scénarios.
 - Bonus: catégories, groupes, clusters, ...

Etapes

1. Définir le problème :
 - Vérifier la faisabilité.
2. Définir les actions, critères et scénarios :
 - Echelles.
3. Modélisation des préférences :
 - Fonctions de préférences.
 - Pondération des critères.
4. Analyse critique :
 - Classements PROMETHEE.
 - GAIA.
 - Analyse de sensibilité (poids).
 - Analyse multi-scénarios.
 - Bonus (utilisation d'outils additionnels).
 - Conclusion.

Bonus

- Définition de catégories d'actions, de groupes et de clusters de critères.
- Utilisation d'outils supplémentaires :
 - Arc-en-ciel PROMETHEE,
 - Profils, GAIA-Webs,
 - Intervalles de stabilité,
 - PROMETHEE V,
 - GIS,
 - ...

Pour utiliser PROMETHEE

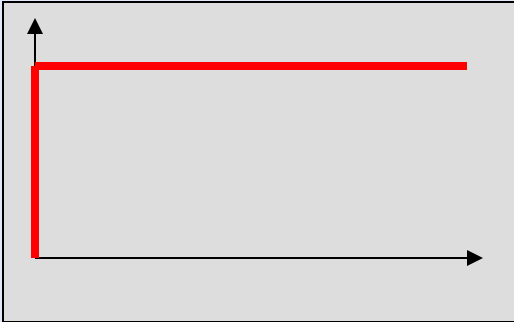
1. Définir les actions :
 - Liste.
2. Définir les critères :
 - Quantitatifs,
 - Qualitatifs (choix de l'échelle).
3. Evaluer (tableau).
4. Pour chaque critère :
 - Choisir un type de fonction de préférence.
 - Fixer les seuils correspondants.
5. Pondérer les critères.

Critères qualitatifs & quantitatifs

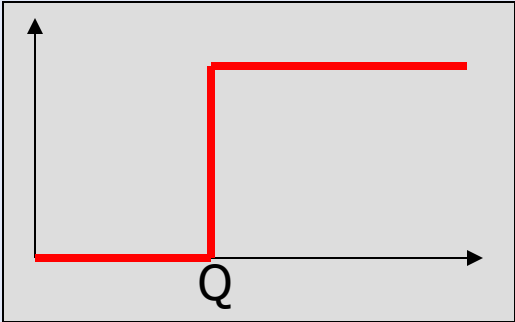
- Critères quantitatifs :
 - Echelle numérique naturelle.
- Critères qualitatifs :
 - Echelle qualitative ordinale (ex: échelles de Likert).
 - Maximum 9 niveaux (7 ± 2) pour assurer une évaluation cohérente.
 - Présence d'un niveau neutre ?
 - Exemples:
 - Très bon, Bon, Moyen, Mauvais, Très mauvais
 - Oui, Non
 - ++, +, 0, -, --
 - ++, +, -, --
 - Echelle numérique sous-jacente (codage).

Fonctions de préférence

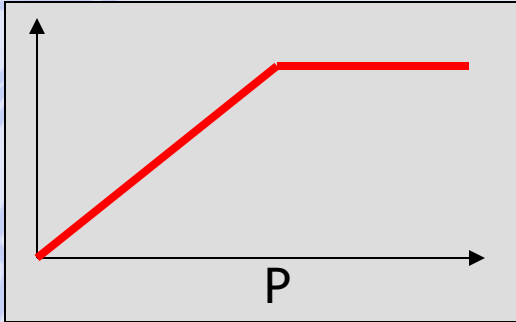
(disponibles dans **Visual PROMETHEE**)



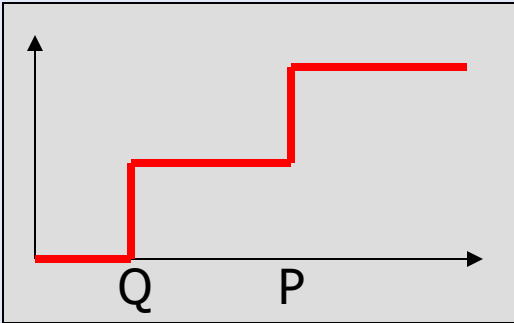
Usuelle



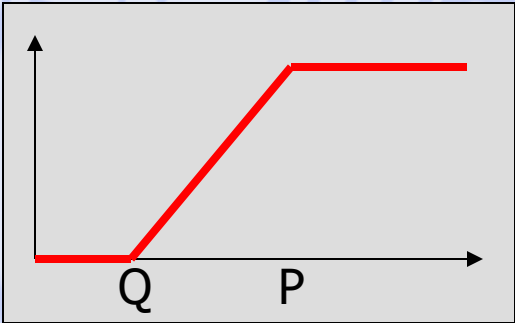
En « U »



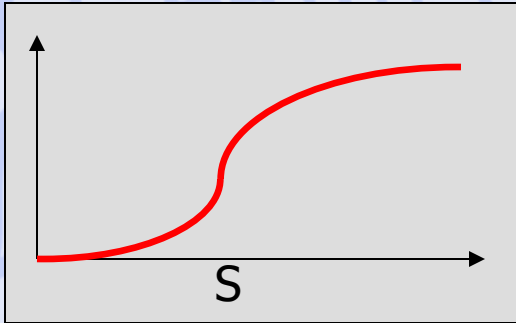
En « V »



A paliers



Linéaire

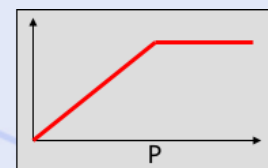


Gaussienne

Fonctions de préférence

- Critères quantitatifs « continus » (ex. coût, prix, distance):

- En « V » (pas de seuil d'indifférence),
- Linéaire.



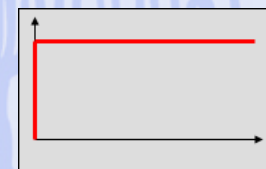
« V » shape



Linear

- Critères qualitatifs ou quantitatifs « discrets » (ex. « très bon à très mauvais », nombre d'hôpitaux):

- Usuelle (pas de seuils),
- A paliers.



Usual

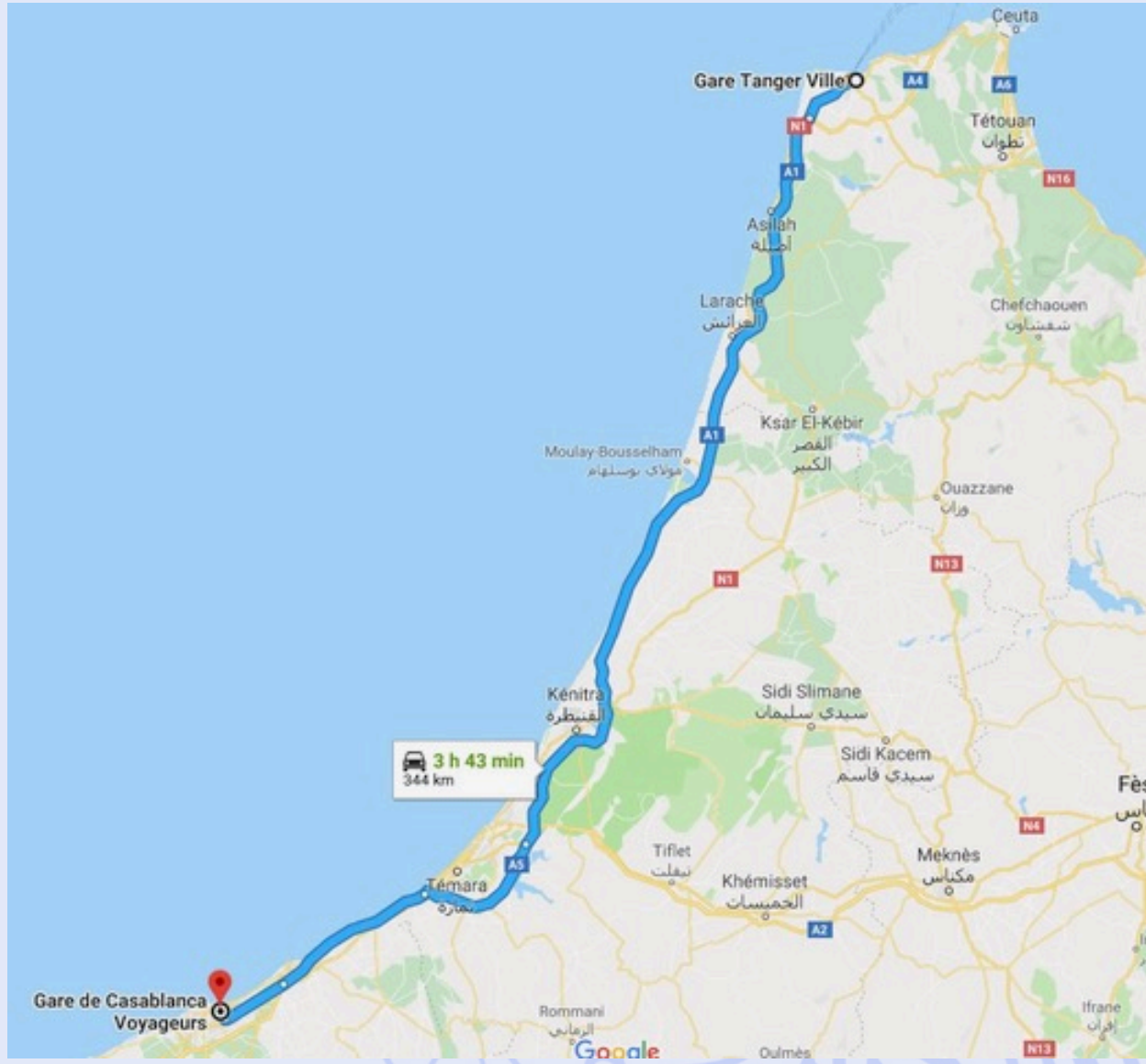


Level

Un exemple... Pas à pas...

Construction
de la
LGV Tanger - Casablanca

LGV Tanger - Casablanca



LGV Tanger - Casa

<https://www.oncf.ma/fr/Developpement/Grands-projets/Ligne-a-grande-vitesse-tanger-casablanca>

- 22,9 milliards DH → **impacts économiques.**
- 344 km - 3h43 en auto → gain de temps.
- 12 viaducs, 2100 ha reboisés, réduction émissions GES
→ **impacts environnementaux.**
- 1800 ha de terrain, 250 ménages expropriés, emplois créés, moins de victimes sur les routes
→ **impacts sociaux.**
- **Choix du tracé ?**

Les données

(fictives - cas d'étude)

- Six tracés possibles : A, B, C, D, E et F
- Six critères :
 - Coût (en milliards de DH)
 - Vitesse commerciale (en km/h)
 - Nombre d'ouvrages d'art (viaducs, ...)
 - Nombre de ménages expropriés
 - Nombre d'emplois créés
 - Impact environnemental (qualitatif - 5 pts)
- Deux scénarios :
 - Gouvernement
 - ONCF (chemins de fer marocains)

Les actions

- Six tracés possibles :
 - A, B, C, D, E, F
- Deux catégories en fonction de l'orientation du tracé :
 - Ouest :
 - A, B, D
 - Est :
 - C, E, F

Les critères

- Coût
 - Quantitatif - monétaire (milliards de DH)
- Vitesse commerciale
 - Quantitatif (km/h)
- Ouvrages d'art
 - Quantitatif - discret (nombre - de 9 à 14)
- Expropriations
 - Quantitatif (nombre de ménages)
- Emplois créés
 - Quantitatif (nombre d'emplois)
- Impact environnemental
 - Qualitatif (5 pts - de très faible à très élevé)

Plan du cours

1. Introduction
 - Contenu du cours
2. Logique mathématique
 - Calcul propositionnel
 - Calcul des prédicats
 - Logique floue et aide à la décision
3. Récurrence et induction
4. Analyse d'algorithmes
 - Comparaison asymptotique de fonctions
 - Complexité
5. Mathématique de la gestion
 - Théorie des graphes
 - Optimisation

Récurrance

- Propositions construites à partir d'un prédicat de poids 1 et du quantificateur universel :

$$\forall n : P(n)$$

- Exemple :

$$\forall n \geq 0 : 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Démonstration par récurrence.

Principe d'induction faible

- Soit $P(n)$ un prédicat de poids 1 dont l'univers est N .
- Si $P(0)$ est vraie et si

$$\forall n : (P(n) \rightarrow P(n+1))$$

est vraie, alors

$$\forall n : P(n)$$

est une proposition vraie.

Principe d'induction faible

- Exemple :

- $P(0)$ est vraie (évident).

- Supposons $P(n)$ vraie :

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

alors :

$$\begin{aligned} 0 + 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Principe d'induction faible

- Variante : Soient $P(n)$ un prédicat de poids 1 dont l'univers est \mathbf{N} et d un nombre naturel.
- Si $P(d)$ est vraie et si

$$\forall n \geq d : (P(n) \rightarrow P(n+1))$$

est vraie, alors

$$\forall n \geq d : P(n)$$

est une proposition vraie.

Principe d'induction forte

- Soit $P(n)$ un prédicat de poids 1 dont l'univers est N .
- Si $P(0)$ est vraie et si

$$\forall n : ((P(0) \wedge P(1) \wedge \dots \wedge P(n)) \rightarrow P(n+1))$$

est vraie, alors

$$\forall n : P(n)$$

est une proposition vraie.

Principe d'induction forte

- Variante : Soient $P(n)$ un prédicat de poids 1 dont l'univers est \mathbf{N} et d un nombre naturel.
- Si $P(d)$ est vraie et si

$$\forall n \geq d : ((P(d) \wedge \dots \wedge P(n)) \rightarrow P(n+1))$$

est vraie, alors

$$\forall n \geq d : P(n)$$

est une proposition vraie.

Principes d'induction

- Les deux principes d'induction sont équivalents.
- Le principe d'induction forte peut se généraliser à d'autres ensembles que N .
- Le principe d'induction forte est parfois plus facile à utiliser dans les démonstrations.

Exemple

- Montrer que :

est vrai pour $n > 2$

