Mathématique

Bertrand Mareschal

bmaresc@ulb.ac.be

https://bertrand.mareschal.ulb.be/math-umons.html

Plan du cours

1. Introduction
   - Contenu du cours
2. Logique mathématique
   - Calcul propositionnel
   - Calcul des prédicats
   - Logique floue et aide à la décision
3. Récurrence et induction
4. Analyse d'algorithmes
   - Comparaison asymptotique de fonctions
   - Complexité
5. Mathématique de la gestion
   - Théorie des graphes
   - Optimisation

1. Introduction

- Présentations et documents disponibles sur la page web du cours.
- Optionnel: Livres de référence:
  - G. Haggard, J. Schlipf et S. Whitesides (2006): **Discrete Mathematics for Computer Science**, Thomson Brooks/Cole, ISBN: 9-780534-495015
  - S. Lipschutz (1983): **Mathématiques pour informaticiens**, série Schaum, McGraw Hill, ISBN: 2-7042-1067-5
  - R. Sedgewick et P. Flajolet (1996): **Introduction à l'analyse des algorithmes**, International Thomson Publishing, ISBN: 2-84180-957-9
- Evaluation :
  - Projet personnel (aide à la décision)
  - Examen écrit en deux parties : théorie (sans notes) et exercices (à livre ouvert).

Plan du cours

1. Introduction
   - Contenu du cours
2. Logique mathématique
   - Calcul propositionnel
   - Calcul des prédicats
   - Logique floue et aide à la décision
3. Récurrence et induction
4. Analyse d'algorithmes
   - Comparaison asymptotique de fonctions
   - Complexité
5. Mathématique de la gestion
   - Théorie des graphes
   - Optimisation

2. Logique mathématique

- Logique classique :
  - Un énoncé a 2 valeurs de vérité possibles :
    - Vrai (V) ou faux (F).
  - Calcul propositionnel.
  - Calcul des prédicats.
- Logique floue :
  - Un énoncé peut être « plus ou moins » vrai ou faux.
  - Application en aide à la décision.

Calcul propositionnel

- **Enoncé :**
  - 2 valeurs de vérité possibles : V (vrai) ou F faux)
  - *Exemples :*
    - Paris est en France.
    - Charleroi est au nord de Bruxelles.
    - 2 + 2 = 5
  - *Attention :*
    - Où allez-vous ? (n'est pas un énoncé)
- **Enoncé composé** : sous-énoncés connectés à l'aide d'opérateurs logiques.
- **Proposition** : énoncé composé faisant intervenir des variables (p, q, r, …)

Conjonction logique - « et »

- Conjonction de deux propositions p et q :

$$p \wedge q$$

- Table de vérité :

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjonction logique – « ou »

- Disjonction de deux propositions p et q : « ou » non exclusif $p \vee q$
- Table de vérité :

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Négation logique – « non »

- Négation d'une proposition p :
  « il est faux que… » $p \vee q$
- Table de vérité :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Table de vérité d'une proposition

- Exemple : $\neg(p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Propositions particulières

- **Tautologie :**
  - Proposition qui est toujours vraie (V partout dans la dernière colonne de la table de vérité).
- **Contradiction :**
  - Proposition qui est toujours fausse (F partout dans la dernière colonne de la table de vérité).
- Exemples :
  - Tautologie : $p \vee \neg p$
  - Contradiction : $p \wedge \neg p$

Equivalence logique

- Deux propositions P et Q sont logiquement équivalentes si elles ont des tables de vérité identiques : $P \equiv Q$
- Exemple : $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$		p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F		V	V	F	F	F
V	F	F	V		V	F	F	V	V
F	V	F	V		F	V	V	F	V
F	F	F	V		F	F	V	V	V

Algèbre des propositions (1)

- Lois idempotentes :

$$p \vee p \equiv p \qquad p \wedge p \equiv p$$

- Lois d'associativité :

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

- Lois de commutativité :

$$p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Algèbre des propositions (2)

- Lois de distributivité :

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

- Lois d'identité :

$$p \vee f \equiv p \qquad p \wedge t \equiv p$$

$$p \vee t \equiv t \qquad p \wedge f \equiv f$$

(t : tautologie, f : contradiction)

Algèbre des propositions (3)

- Lois de complémentarité :

$$p \vee \neg p \equiv t \qquad p \wedge \neg p \equiv f$$

$$\neg t \equiv f \qquad \neg f \equiv t$$

- Loi d'involution : $\neg\neg p \equiv p$
- Lois de de Morgan :

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Enoncé conditionnel

- « Si p, alors q » : $p \rightarrow q$
  - p implique q, p seulement si q
- Table de vérité :

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Enoncé biconditionnel

- « p si et seulement si q » : $p \leftrightarrow q$
- Table de vérité :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Propriétés

- En fonction des opérateurs logiques :

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

- Contraposée :

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$\neg p \to \neg q$	$\neg q \to \neg p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

Exemples

- Si j’étudie, je réussis mon examen.
- Si je réussis mon examen, c’est que j’ai étudié.
- Si je ne réussis pas mon examen, c’est que je n’ai pas étudié.
- Si je n’étudie pas, je ne réussis pas mon examen.

- Si A est un triangle équilatéral, A est isocèle (V).
- Si A est un triangle isocèle, A est équilatéral (F).

Raisonnement (1)

- Relation entre un ensemble de propositions (P_1, P_2, …, P_n) appelées prémisses et une proposition Q appelée conclusion : $P_1, P_2, \ldots, P_n \succ Q$
- Un raisonnement est valide si Q est vraie dans tous les cas où les prémisses sont toutes vraies.
- Un raisonnement non valide est appelé contre-vérité.

Raisonnement (2)

- Exemples :
  - Valide (modus ponens) : $p, p \rightarrow q \succ q$
  - Contre-vérité : $p \rightarrow q, q \succ p$
  - Syllogisme : $p \rightarrow q, q \rightarrow r \succ p \rightarrow r$
- Propriété :

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \succ Q$$

est valide ssi

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$$

est une tautologie

Implication logique

- P implique logiquement Q si Q est vraie dans tous les cas où P est vraie : $P \Rightarrow Q$

- Exemple : $p \Rightarrow p \vee q$

Propriétés

- Théorème : Les trois énoncés suivants sont équivalents :
  1. $P \Rightarrow Q$
  2. Le raisonnement $P \succ Q$ est valide
  3. $P \rightarrow Q$ est une tautologie

- Si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$, P et Q ont la même table de vérité et $P \equiv Q$

Formes normales

- Objectifs :
  - Simplifier l'interprétation de propositions.
  - Vérifier qu'une proposition peut être vraie, ou qu'elle est une tautologie.
- 2 formes normales :
  - Forme normale disjonctive.
  - Forme normale conjonctive.

Forme normale disjonctive

- Exemple 1 :
  - Les deux propositions suivantes sont logiquement équivalentes :

$$(p \to (q \vee r)) \leftrightarrow (q \to p)$$

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

  - Vérification : tables de vérité identiques.
  - La 2ème est sous forme normale disjonctive.

p	q	r	q∨r	p → q∨r	q→p	↔
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

p	q	r	q∨r	p → q∨r	q→p	↔
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Forme normale disjonctive

- Exemple 2 : (négation)

$$\neg((p \to (q \vee r)) \leftrightarrow (q \to p))$$

$$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

Forme normale disjonctive

- Théorème :

Toute proposition est logiquement équivalente à une proposition sous forme normale disjonctive (pas nécessairement unique).

- Principe de démonstration :
  - Ecrire la table de vérité.
  - Identifier les lignes pour lesquelles la proposition est vraie.
  - Ecrire la disjonction des conjonctions de « lettres » correspondantes.

Exemple 3

$$\neg(p \to q) \to (q \wedge \neg r)$$

p	**q**	**r**	**¬(p→q)**	**q∧¬r**	**→**
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

Exemple 3

$$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg r)$$

p	q	r	¬(p→q)	q∧¬r	→
V	**V**	**V**	F	F	**V**
V	**V**	**F**	F	V	**V**
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	**V**	**V**	F	F	**V**
F	**V**	**F**	F	V	**V**
F	**F**	**V**	F	F	**V**
F	**F**	**F**	F	F	**V**

$$(p \wedge q) \vee \neg p$$

Forme normale conjonctive

- Exemple 1 :
  - Les deux propositions suivantes sont logiquement équivalentes :

$$(p \to (q \vee r)) \leftrightarrow (q \to p)$$

$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$$

  - Vérification : tables de vérité identiques.
  - La 2ème est sous forme normale conjonctive.

Forme normale conjonctive

- Théorème :

Toute proposition est logiquement équivalente à une proposition sous forme normale conjonctive (pas nécessairement unique).

- Principe de démonstration :
  - Transformer la négation de la proposition sous forme normale disjonctive.
  - Utiliser la loi de De Morgan pour se ramener à une forme normale conjonctive pour la proposition.

Exemple 3

$$\neg(p \to q) \to (q \wedge \neg r)$$

p	q	r	¬(p→q)	q∧¬r	→
V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	V

Exemple 3

$$\neg(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg r))$$

p	q	r	¬(p→q)	q∧¬r	¬ (→)
V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Exemple 3

$$\neg(\neg(p \to q) \to (q \wedge \neg r))$$

p	q	r	¬(p→q)	q∧¬r	¬ (→)
V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

Exemple 3

$$\neg(\neg(p \to q) \to (q \wedge \neg r))$$

$$\equiv$$

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

$$\neg(p \to q) \to (q \wedge \neg r)$$

$$\equiv$$

$$(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r)$$

Calcul des prédicats

- **Prédicat** : Proposition qui porte sur des éléments variables d'un ensemble fixé.
- Exemples :
  - n est pair.
  - Le triangle T est isocèle.
  - La relation R sur **N** est réflexive.

Prédicat

- Définition : Application P qui associe une proposition $P(x)$ à chaque élément x d'un ensemble E (univers du prédicat).
- Poids d'un prédicat : nombre de variables.
- Exemples :

$$P(n) = \{n \in \mathbb{Z} \text{ est pair}\} \qquad \text{(poids 1)}$$

$$P(a,b) = \{a,b \in \bullet \text{ sont tels que } a+b=5\} \qquad \text{(poids 2)}$$

$$Q(b) = P(3,b) = \{b \in \bullet \text{ est tel que } 3+b=5\} \qquad \text{(poids 1)}$$

$$R = Q(9) = \{3+9=5\} \qquad \text{(poids 0)}$$

$$P(a) = \{a \in {}^{\sim} \text{ est positif}\} \qquad \text{(poids 1)}$$

$$Q(a,b) = \{a \in {}^{\sim}, b \in B \text{ sont tels que } a \text{ est positif}\} \qquad \text{(poids 2)}$$

Combinaisons de prédicats

- Exemples :

$$P(n) = \{n \in \bullet \text{ est pair}\}$$

$$Q(n) = \{n \in \bullet \text{ est le carré d'un autre entier naturel}\}$$

$$\neg P(n) = \{n \in \bullet \text{ n'est pas pair}\}$$

$$P \wedge Q(n) = \{n \in \bullet \text{ est pair et est le carré d'un autre entier naturel}\}$$

$$P \vee Q(n) = \{n \in \bullet \text{ est pair ou est le carré d'un autre entier naturel}\}$$

Combinaisons de prédicats

- Exemples :

$$P(n)=\{n\in\bullet\ \text{ est pair}\}$$

$$Q(m)=\{m\in\bullet\ \text{ est divisible par 3}\}$$

$$P\wedge Q(n)=\{n\in\bullet\ \text{ est pair et est divisible par 3}\}$$

$$R(m,n)=\{n\in\bullet\ \text{ est pair}\}$$

$$S(m,n)=\{m\in\bullet\ \text{ est divisible par 3}\}$$

$$R\wedge S(m,n)=\{n\in\bullet\ \text{ est pair et } m\in\bullet\ \text{ est divisible par 3}\}$$

Quantificateurs

- Quantificateur universel :
  - Quel que soit x la proposition $P(x)$ est vraie :

$$\forall x : P(x)$$

- Quantificateur existentiel :
  - Il existe x tel que la proposition $P(x)$ est vraie :

$$\exists x : P(x)$$

Quantificateurs

- Exemples :

$$P(n)=\{n \in \bullet \ \text{ est pair}\}$$

$$\forall n : P(n)=\{\text{tout entier naturel est pair}\} \qquad \text{(faux)}$$

$$\exists n : P(n)=\{\text{il existe un entier naturel est pair}\} \qquad \text{(vrai)}$$

Quantificateurs

- Théorème 1 : Soit $P(a,b)$ un prédicat de poids 2. Alors :

$$1°\quad \forall a \forall b : P(a,b) \equiv \forall b \forall a : P(a,b)$$

$$2°\quad \exists a \exists b : P(a,b) \equiv \exists b \exists a : P(a,b)$$

$$3°\quad \exists b : \forall a : P(a,b) \Rightarrow \forall a : \exists b : P(a,b)$$

$$4°\quad \exists a : \forall b : P(a,b) \Rightarrow \forall b : \exists a : P(a,b)$$

Quantificateurs

- Exemple :

$$P(a,b) = \{a,b \in \mathbb{Z} \text{ sont tels que } a+b=5\}$$

$\forall a \forall b : P(a,b)$	$\left\{\begin{array}{l}\text{tous les } a,b \in \mathbb{Z} \text{ sont} \\ \text{tels que } a+b=5\end{array}\right\}$	F
$\exists a \exists b : P(a,b)$		V
$\exists b : \forall a : P(a,b)$		F
$\forall a : \exists b : P(a,b)$		V
$\exists a : \forall b : P(a,b)$		F
$\forall a : \exists b : P(a,b)$		V

Quantificateurs

- Théorème 2 :

$$1° \quad \neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : (\neg P(x))$$

$$2° \quad \neg(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : (\neg P(x))$$

- Exemples :

$$\neg(\forall n : n \text{ est divisible par } 3)$$

$$\equiv$$

$$\exists n : n \text{ n'est pas divisible par } 3$$

$$\neg(\forall x : \exists y : P(x, y)) \equiv \exists x : \forall y : \neg P(x, y)$$

Quantificateurs

- Théorème 3 :

1° $\forall x : (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x))$

2° $\exists x : (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x : P(x)) \wedge (\exists x : Q(x))$

3° $\exists x : (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x))$

4° $\forall x : (P(x) \vee Q(x)) \Leftarrow (\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))$

Quantificateurs

- Exemple :

$$P(x) = \{x \in \bullet \ \text{ est pair}\}$$
$$Q(x) = \{x \in \bullet \ \text{ est impair}\}$$

$\forall x : (P(x) \wedge Q(x))$		F
$(\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x))$		F
$\exists x : (P(x) \wedge Q(x))$		F
$(\exists x : P(x)) \wedge (\exists x : Q(x))$		V
$\exists x : (P(x) \vee Q(x))$		V
$(\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x))$		V
$(\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))$		F
$\forall x : (P(x) \vee Q(x))$		V

Logique floue

- Un énoncé a un degré de vérité compris entre 0 et 1.
- Exemple : « il fait chaud »
  - 0 : faux,
  - 0,2 : plutôt faux,
  - 0,5 : peut-être bien…
  - 0,8 : plutôt vrai,
  - 1 : vrai.
- Redéfinition des opérateurs logiques.

Application en aide à la décision

- Problèmes de décision.
- Modélisation des préférences.
- Structures de préférences.
- La méthodologie PROMETHEE.

Quelques Problèmes de Décision et d'Evaluation

- Choisir le site d'implantation d'une nouvelle usine, d'un magasin, ...
- Engager du personnel, GRH.
- Acheter du matériel.
- Evaluer la qualité des fournisseurs.
- Evaluer des projets.
- Choisir une stratégie d'investissement.

Tableau Multicritère

- Actions :
  - décisions possibles,
  - items à évaluer.
- Critères :
  - quantitatifs,
  - qualitatifs.

Tableau Multicritère

Action 1 Action 2 Action 3 Action 4 Action 5 …	

Tableau Multicritère

	Crit. 1 (unité)	Crit. 2 (unité)	Crit. 3 (unité)	Crit. 4 (unité)	…
Action 1					
Action 2					
Action 3					
Action 4					
Action 5					
…					

Tableau Multicritère

	Crit. 1 (/20)	Crit. 2 (cote)	Crit. 3 (appréc.)	Crit. 4 (O/N)	…
Action 1	18	135	B	Oui	…
Action 2	9	147	M	Oui	…
Action 3	15	129	TB	Non	…
Action 4	12	146	TM	?	…
Action 5	7	121	B	Oui	…
…	…	…	…	…	…

Localisation d'une Usine

	Investissement (BEF)	Coûts (BEF)	Environn. (estimation)	…
Site 1	18	135	B	…
Site 2	9	147	M	…
Site 3	15	129	TB	…
Site 4	12	146	TM	…
Site 5	7	121	B	…
…	…	…	…	…

Possibilité d'Achats

	Prix (BEF)	Fiabilité (jours)	Maintenance (estimation)	…
Produit A	18	135	B	…
Produit B	9	147	M	…
Produit C	15	129	TB	…
Produit D	12	146	TM	…
Produit E	7	121	B	…
…	…	…	…	…

Un Exemple

Achat d'une automobile

Objectifs :

- Economie à l'achat (prix),
- Economie à l'usage (consommation),
- Performances (puissance),
- Confort,
- Habitabilité.

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	360000	75	8,0	3	3
Sport	390000	110	9,0	1	2
Moyenne B	355000	85	7,0	4	3
Luxe 1	480000	90	8,5	4	5
Economic	250000	50	7,5	2	1
Luxe 2	450000	85	9,0	5	4

- Quel est le meilleur achat ?

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	360000	75	8,0	3	3
Sport	390000	**110**	9,0	1	2
Moyenne B	355000	85	**7,0**	4	3
Luxe 1	480000	90	8,5	4	**5**
Economic	**250000**	50	7,5	2	1
Luxe 2	450000	85	9,0	**5**	4

- Quel est le meilleur achat ?

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	360000	75	8,0	3	3
Sport	390000	**110**	9,0	1	2
Moyenne B	355000	85	**7,0**	4	3
Luxe 1	480000	90	8,5	4	**5**
Economic	**250000**	50	7,5	2	1
Luxe 2	450000	85	9,0	**5**	4

- Quel est le meilleur achat ?
- Quel est le meilleur compromis ?

Tableau Multicritère

Marque	Prix	Puissance	Consomm.	Habitabilité	Confort
Moyenne A	360000	75	8,0	3	3
Sport	390000	**110**	9,0	1	2
Moyenne B	355000	85	**7,0**	4	3
Luxe 1	480000	90	8,5	4	**5**
Economic	**250000**	50	7,5	2	1
Luxe 2	450000	85	9,0	**5**	4

- Quel est le meilleur achat ?
- Quel est le meilleur compromis ?
- Quelles sont les priorités de l'acheteur ?

Modélisation des préférences

- Problème :

  Comment comparer deux actions a et b entre elles ?

- Premier modèle : 3 résultats possibles :
  1. Préférence : aPb ou bPa
  2. Indifférence : aIb
  3. Incomparabilité : aRb

Structure de préférences

- Propriétés (logiques):

aPb $\Rightarrow$ non bPa	P est asymétrique
aIa	I est réflexive
aIb $\Rightarrow$ bIa	I est symétrique
Non aRa	R est irréflexive
aRb $\Rightarrow$ bRa	R est symétrique

- Ces trois relations de préférence forment une structure de préférence (s.p.), si pour tous a,b de A on a toujours l'une des quatre situations suivantes :

aPb ou bPa ou aIb ou aRb

Structure de préférence traditionnelle (unicritère)

- Optimisation d'une fonction g définie sur A

$$\forall a,b \in A : \begin{cases} aPb & \Leftrightarrow & g(a) > g(b) \\ aIb & \Leftrightarrow & g(a) = g(b) \end{cases}$$

- Conséquences :

R est vide
P est transitive
I est transitive

- Préordre total.

Notion de seuil d'indifférence

- Problème : Intransitivité de l'indifférence.

  Cf. Paradoxe de la tasse de café (Luce, 1956)

- Introduction d'un seuil d'indifférence :

$$\forall a,b \in A : \begin{cases} aPb & \Leftrightarrow \quad g(a) > g(b) + q \\ aIb & \Leftrightarrow \quad \left| g(a) - g(b) \right| \leq q \end{cases}$$

- Quasi-ordre : P est transitive, mais pas I.

Autres structures de préférences

- Seuil d'indifférence variable
  $\Rightarrow$ Notion d'ordre d'intervalle.
- Seuil de préférence + seuil d'indifférence
  $\Rightarrow$ Notion de pseudo-ordre.
- Modèles incluant l'incomparabilité
  $\Rightarrow$ Notion d'ordre partiel.
- **Structures valuées de préférences.**

Théorie du choix social

- Problème :
  - Un groupe de personnes doivent choisir un candidat parmi plusieurs (élection).
  - Chaque personne (électeur) classe les candidats par ordre de préférence.
  - Quel candidat doit être élu ?
- Quelle est la « meilleure » procédure de vote ?
- Analogie avec les modèles multicritères :
  - Candidats $\leftrightarrow$ actions,
  - Electeurs $\leftrightarrow$ critères.

5 procédures…
… parmi d'autres…

1. Majorité relative.
2. Condorcet.
3. Scrutin à 2 tours (présidentielle).
4. Borda.
5. Eliminations successives.

Procédure 1 : Majorité relative

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

30 votants:

11 votants	**10** votants	**9** votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

A	11
B	10
C	9

Albert est élu

Procédure 1 : Majorité relative

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

30 votants:

11 votants	**10** votants	**9** votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

A	11
B	10
C	9

Albert est élu

Problème : B et C préférés à A par une majorité de votants !

Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat Marquis de Condorcet 1743 - 1794

Procédure 2 : Condorcet

<u>3 candidats:</u> **A**lbert, **B**runo, **C**laire

30 votants:

11 votants	**10** votants	**9** votants
A	B	C
B	C	B
C	A	A

B meilleur que **A**	19 votes
B meilleur que **C**	21 votes
C meilleur que **A**	19 votes

Bruno est élu

Procédure 2 : Paradoxe de Condorcet

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

9 votants:

4 votants	**3** votants	**2** votants
A	B	C
B	C	A
C	A	B

A meilleur que **B**	6 votes
B meilleur que **C**	7 votes
C meilleur que **A**	5 votes

pas d'élu !

Procédure 3 : Scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

4 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire, **D**iane

63 votants:

22 votants	**21** votants	**20** votants
B	C	D
A	A	A
C	D	C
D	B	B

1er tour:	**B** et **C**
2ème tour:	**C** bat B (41 contre 22)

Claire est élue

Procédure 3 : Scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

4 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire, **D**iane

63 votants:

22 votants	**21** votants	**20** votants
B	C	D
A	A	A
C	D	C
D	B	B

Claire est élue !!!

...alors que

A meilleur que **C**	42 votes
A meilleur que **B**	41 votes
A meilleur que **D**	43 votes

Procédure 3 : scrutin à 2 tours (élection présidentielle française)

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

17 votants:

5 votants	**6** votants	**4** votants	**2** votants
C	A	B	B
A	B	C	A
B	C	A	C

1er tour:	**A** et **B**
2ème tour:	**A** bat B (11 contre 6)

Albert est élu

Procédure 3 : scrutin à 2 tours
(élection présidentielle française)

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

17 votants:

5 votants	**6** votants	**4** votants	**2** votants
C	A	B	**A** ~~B~~
A	B	C	**B** ~~A~~
B	C	A	C

Albert était élu

1er tour:	**A** et **C**
2ème tour:	**C** bat A (9 contre 8)

Claire est élue !

Problème : non-monotonicité !

Jean Charles de Borda
1733 - 1799

Procédure 4 : Borda

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire
81 votants:

30 votants	**29** votants	**10** votants	**10** votants	**1** votant	**1** votant
A	C	C	B	A	B
C	A	B	A	B	C
B	B	A	C	C	A

Points	**Score**	
2	A	**101**
1	B	**33**
0	C	**109**

31 x 2 + 39 x 1

11 x 2 + 11 x 1

39 x 2 + 31 x 1

Claire est élue !

Procédure 4 : Borda

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

81 votants:

30 votants	**29** votants	**10** votants	**10** votants	**1** votant	**1** votant
A	C	C	B	A	B
C	A	B	A	B	C
B	B	A	C	C	A

Points
2
1
0

Scores	
A	**101**
B	**33**
C	**109**

A meilleur que **C : 41** sur 81

Procédure 4 : Borda

4 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire, **D**iane

7 votants:

3 votants	**2** votants	**2** votants	**Points**
C	B	A	3
B	A	D	2
A	D	C	1
D	C	B	0

Scores	
A	13
B	12
C	11
D	6

Classement
A
B
C
D

Albert est élu

Procédure 4 : Borda

4 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire, ~~**D**iane~~

7 votants:

3 votants	2 votants	2 votants	Points
C	B	A	2
B	A	C	1
A	C	B	0

Scores	
A	6
B	7
C	8

Classement
C
B
A

Claire est élue

Borda (manipulation)

3 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire

34 votants:

12 votants	12 votants	10 votants	Points
A	B	C	2
B	A	A	1
C	C	B	0

Les partisans de Bruno suscitent la candidature du candidat x (« candidat bidon »)

Scores	
A	46
B	36
C	20

Classement
A
B
C

Albert est élu

Borda (manipulation)

4 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire, **x**

34 votants:

12 votants	**12** votants	**10** votants	**Points**
A	B	C	3
B	x	A	2
C	A	B	1
x	C	x	0

Scores	
A	68
B	70
C	42
x	24

Classement
B
A
C
x

Bruno est élu!

Borda (manipulation)

4 candidats: **A**lbert, **B**runo, **C**laire, **x**

34 votants:

12 votants	**12** votants	**10** votants	**Points**
A	B	C	3
x	x	x	2
B	A	A	1
C	C	B	0

Scores	
A	58
B	48
C	30
x	68

Classement
x
A
B
C

Le candidat « bidon » est élu!

Procédure 5 : Eliminations successives

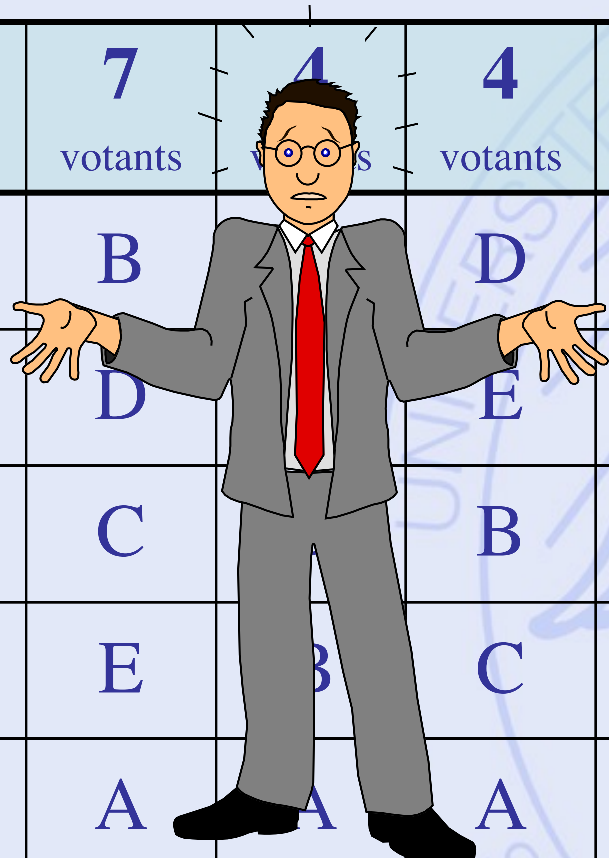
- Procédure par tours.
- Principe :
  Eliminer à chaque tour le moins bon candidat, jusqu’à ce qu’il n’en reste plus qu’un.

En conclusion ?

<u>5 candidats:</u> **A**lbert, **B**runo, **C**laire, **D**iane, **E**ric

25 votants:

8 votants	**7** votants	**4** votants	**4** votants	**2** votants
A	B		D	C
C	D		E	E
D	C		B	D
B	E	B	C	B
E	A	A	A	A



Majorité relative:
→ **Albert** est élu

Procédure française:
→ **Bruno** est élu

Procédure de Condorcet:
→ **Claire** est élue

Procédure de Borda:
→ **Diane** est élue

Eliminations successives:
→ **Eric** est élu

Kenneth Arrow
(Nobel d'économie, 1972)

- Théorème d'impossibilité (1952) :
  Avec au moins 2 votants et 3 candidats, il est **impossible** de construire une procédure de vote satisfaisant simultanément les 5 propriétés suivantes :
  - Non-dictature.
  - Universalité.
  - Indépendance vis-à-vis des tiers.
  - Monotonicité.
  - Non-imposition.

Méthodes de Surclassement

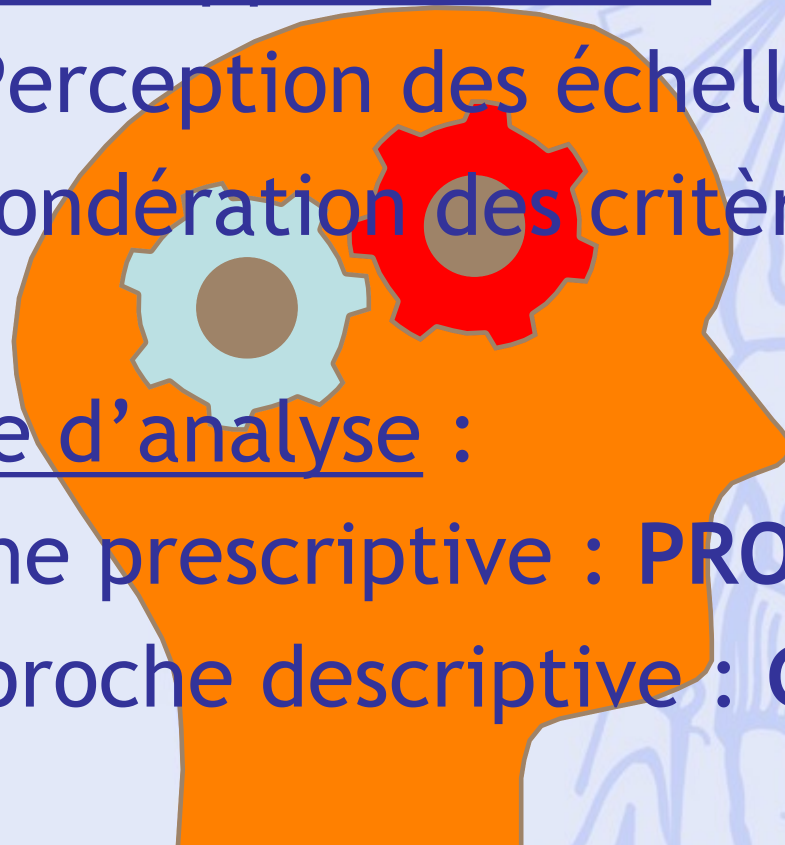
- Principe de majorité
  (Cf théorie du choix social)
- Comparaisons par paires des actions.

Méthodes d'Aide à la Décision

- Information supplémentaire :

  Perception des échelles

  Pondération des critères



- Procédure d'analyse :

  Approche prescriptive : **PROMETHEE**

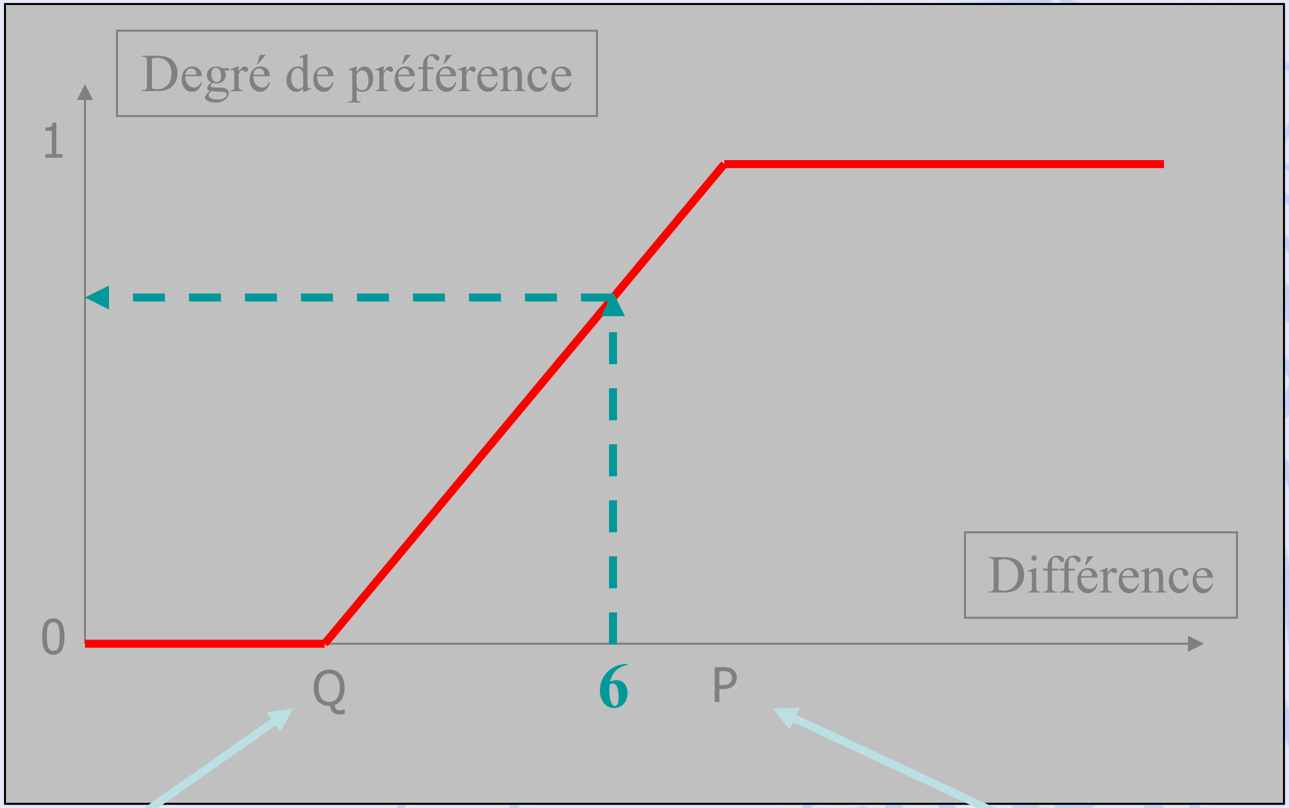
  Approche descriptive : **GAIA**

Comparaison de 2 Actions

	Crit. 1 (/20)	Crit. 2 (cote)	Crit. 3 (appréc.)	Crit. 4 (O/N)	…
Action 1	18	135	B	Oui	…
Action 2	9	147			…
Action 3	15	129	TB	Non	…
Action 4	12	146	TM	?	…
Action 5	7	121	B	Oui	…
…	…	…	…	…	…

Différence = 6

Fonctions de Préférence



Seuil d'indifférence

Linéaire

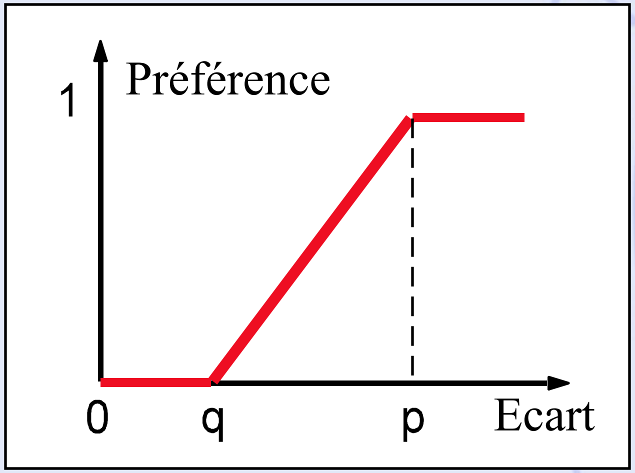
Seuil de préférence

PROMETHEE

	Economic		Luxe 1	
-230000	**250000**	*Prix*	480000	
	50	*Puissance*	**90**	**+40**
-1,0	**7,5**	*Consomm.*	8,5	
	2	*Habitabilité*	**4**	**+2**
	1	*Confort*	**5**	**+4**

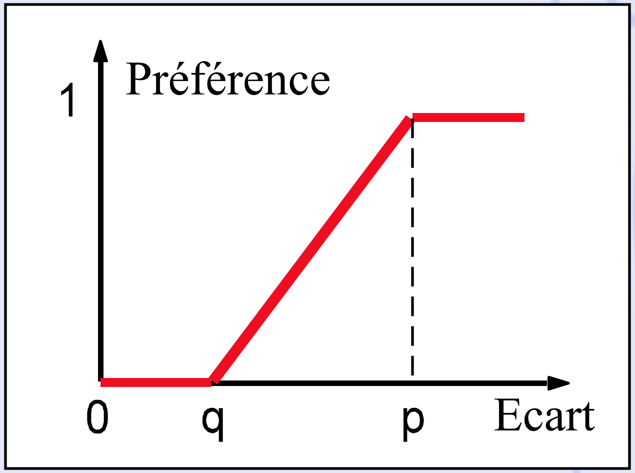
PROMETHEE

		Economic		Luxe 1		
1,0	**-230000**	250000	*Prix*	480000		
		50	*Puissance*	90	**+40**	**1,0**
0,5	**-1,0**	7,5	*Consomm.*	8,5		
		2	*Habitabilité*	4	**+2**	**0,5**
		1	*Confort*	5	**+4**	**1,0**



PROMETHEE

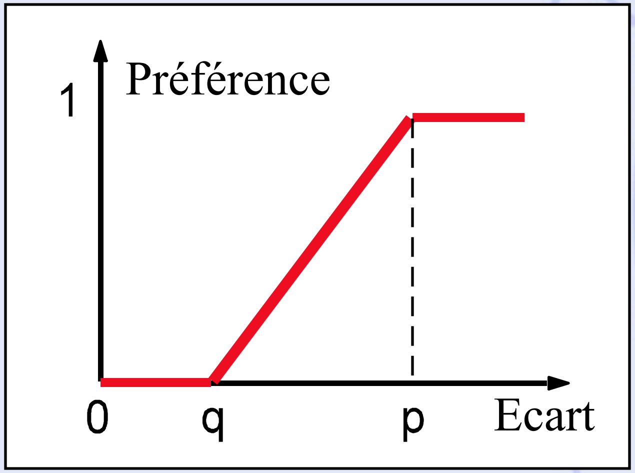
Préf (Eco.,Lux.)		Economic		Luxe 1		Préf (Lux.,Eco.)
1,0	**-230000**	250000	*Prix*	480000		0,0
0,0		50	*Puissance*	90	**+40**	**1,0**
0,5	**-1,0**	7,5	*Consomm.*	8,5		0,0
0,0		2	*Habitabilité*	4	**+2**	**0,5**
0,0		1	*Confort*	5	**+4**	**1,0**



PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.) | **Préf (Lux.,Eco.)**

Préf (Eco.,Lux.)		**Economic**		**Luxe 1**		Préf (Lux.,Eco.)	*Poids*
1,0	**-230000**	250000	*Prix*	480000		0,0	*1*
0,0		50	*Puissance*	90	**+40**	**1,0**	*1*
0,5	**-1,0**	7,5	*Consomm.*	8,5		0,0	*1*
0,0		2	*Habitabilité*	4	**+2**	**0,5**	*1*
0,0		1	*Confort*	5	**+4**	**1,0**	*1*

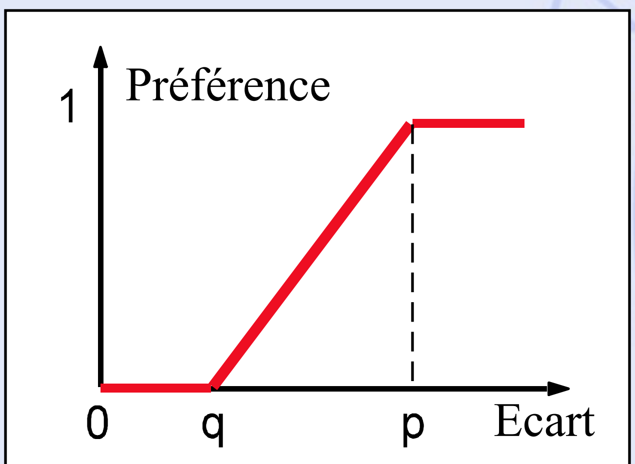


- Préf (Eco.,Lux.) = 0,3
  $= (1 + 0 + 0{,}5 + 0 + 0) / 5$
- Préf (Lux.,Eco.) = 0,5
  $= (0 + 1 + 0 + 0{,}5 + 1) / 5$

PROMETHEE

Préf (Eco.,Lux.) **Préf (Lux.,Eco.)**

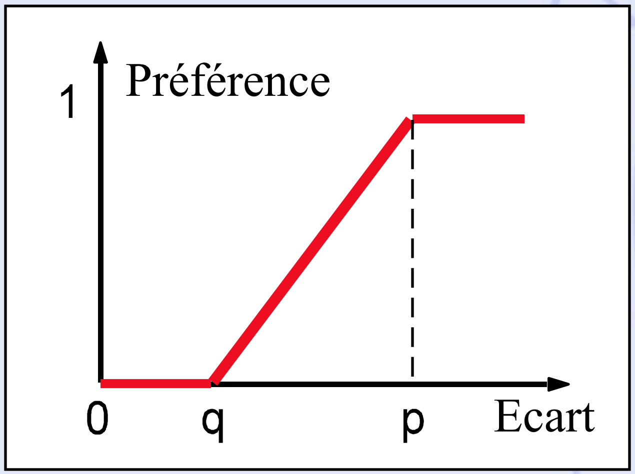
			Economic		Luxe 1				*Poids*
1,0		**-230000**	250000	*Prix*	480000			0,0	*2*
0,0			50	*Puissance*	90	**+40**		**1,0**	*1*
0,5		**-1,0**	7,5	*Consomm.*	8,5			0,0	*2*
0,0			2	*Habitabilité*	4	**+2**		**0,5**	*1*
0,0			1	*Confort*	5	**+4**		**1,0**	*1*

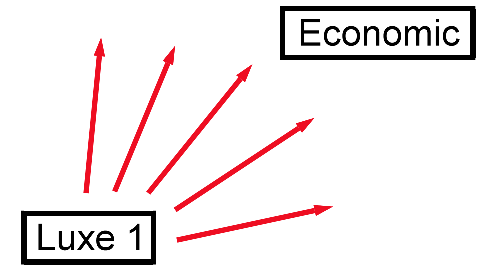


- Préf (Eco.,Lux.) = 0,43
  = (2 x 1 + 0 + 2 x 0,5 + 0 + 0) / 7
- Préf (Lux.,Eco.) = 0,36
  = (0 + 1 + 0 + 0,5 + 1) / 7

PROMETHEE

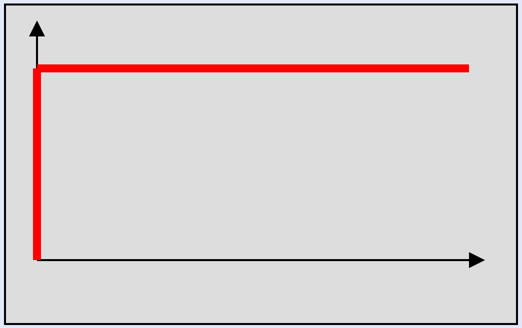
Préf (Eco.,Lux.)		Economic		Luxe 1		Préf (Lux.,Eco.)
1,0	-230000	250000	*Prix*	480000		0,0
0,0		50	*Puissance*	90	+40	1,0
0,5	-1,0	7,5	*Consomm.*	8,5		0,0
0,0		2	*Habitabilité*	4	+2	0,5
0,0		1	*Confort*	5	+4	1,0



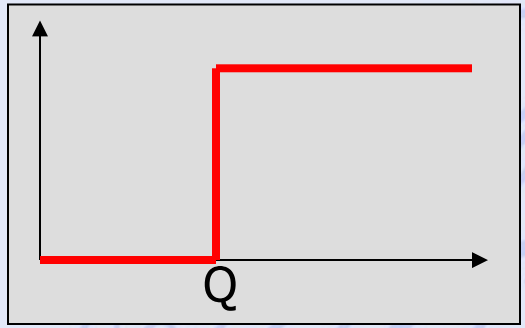


Comparaisons par paires

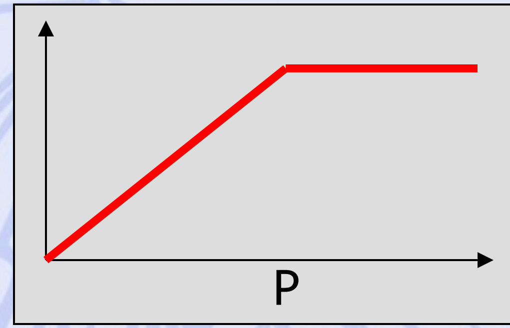
Fonctions de Préférence



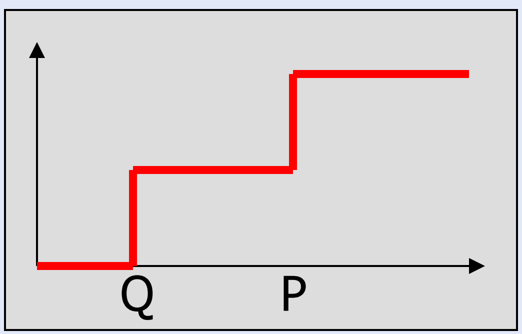
Critère usuel



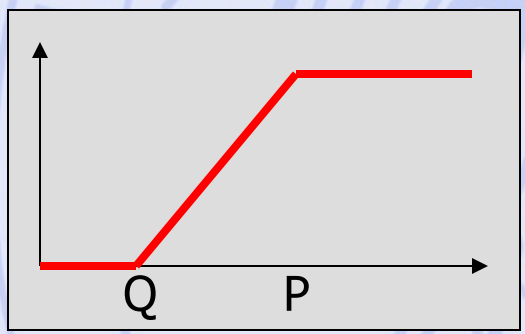
Critère en « U »



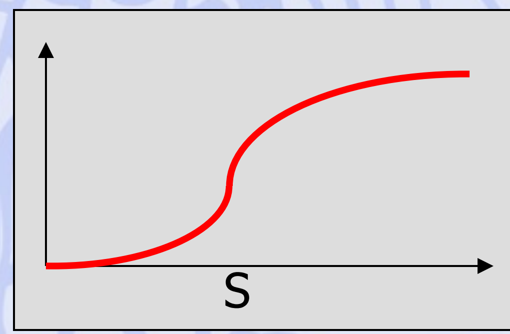
Critère en « V »



Critère à palier



Critère linéaire



Critère Gaussien

Comparaisons par Paires

- Pour chaque critère g_j :
  - Fonction de préférence P_j
  - Poids w_j
- Degré de préférence multicritère de a sur b :

$$\boxed{\pi(a,b) = \sum_{j=1}^{k} w_j \, P_j(a,b)}$$

Matrice des $\pi(a,b)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^+(a)$
$Moy.A$	0,00						
$Sport$		0,00					
$Moy.B$			0,00				
$Lux.1$				0,00	0,50		
$Econ.$				0,30	0,00		
$Lux.2$						0,00	
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

Matrice des $\pi(a,b)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^{+}(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	
$\phi^{-}(a)$							
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^+(a)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^+(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$							
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^{+}(a)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^{+}(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^{-}(a)$							
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^{-}(a)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^{+}(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^{-}(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi^{-}(a)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^{+}(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^{-}(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$							

Calcul de $\phi(a)$

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^{+}(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^{-}(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

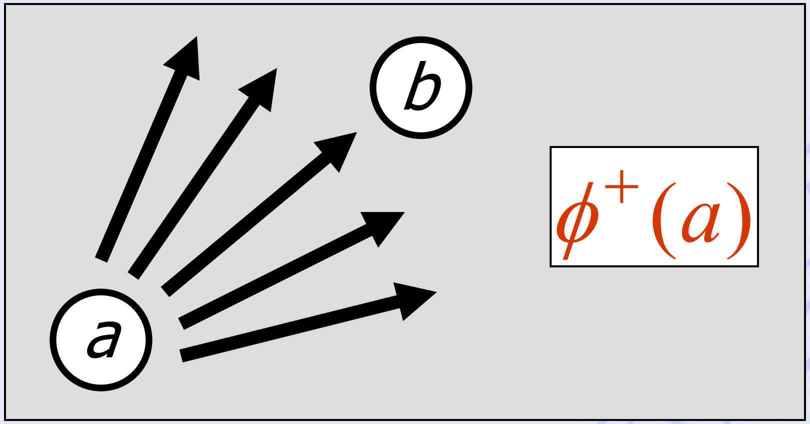
Calcul de $\phi(a)$

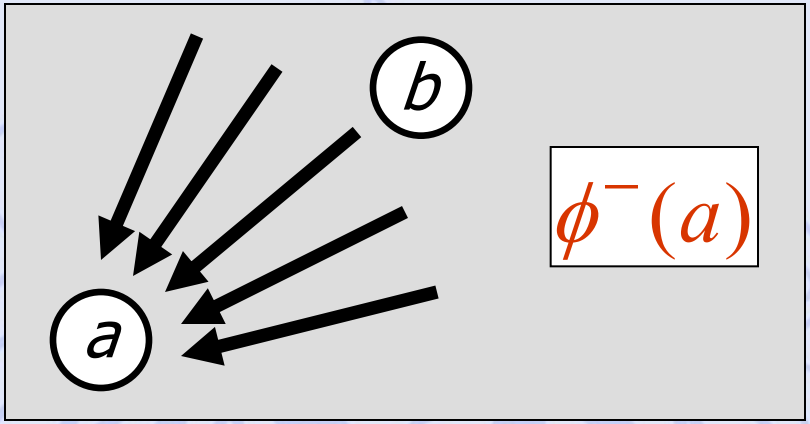
$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^{+}(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^{-}(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

Calcul des flux de préférence

$\pi(a,b)$	$Moy.A$	$Sport$	$Moy.B$	$Lux.1$	$Econ.$	$Lux.2$	$\phi^+(a)$
$Moy.A$	0,00	0,34	0,00	0,21	0,26	0,22	0,21
$Sport$	0,20	0,00	0,16	0,24	0,30	0,24	0,23
$Moy.B$	0,15	0,55	0,00	0,32	0,45	0,33	0,36
$Lux.1$	0,18	0,45	0,10	0,00	0,50	0,15	0,28
$Econ.$	0,20	0,34	0,14	0,30	0,00	0,35	0,27
$Lux.2$	0,24	0,30	0,10	0,04	0,60	0,00	0,26
$\phi^-(a)$	0,19	0,40	0,10	0,22	0,42	0,26	
$\phi(a)$	0,02	-0,17	0,26	0,06	-0,15	0,00	

Flux de Préférence

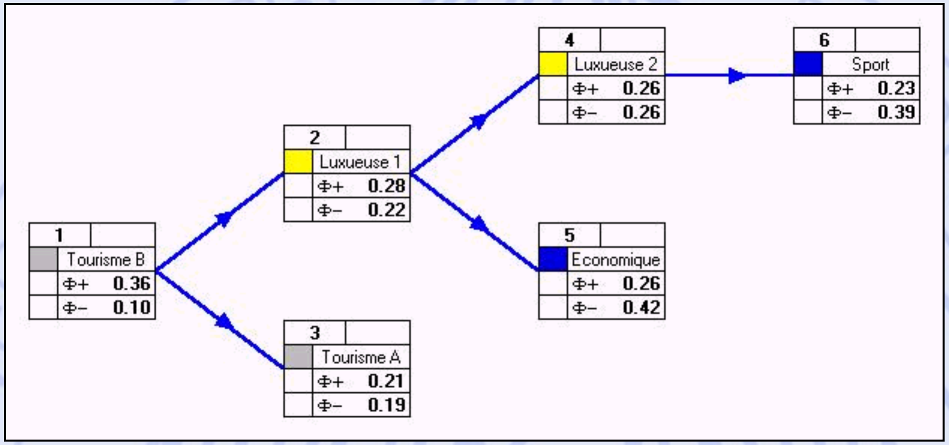


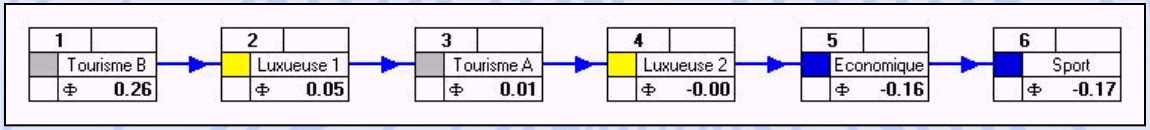


- Flux sortant : (puissance) $$\phi^{+}(a)=\frac{1}{n-1}\sum_{b\in A}\pi(a,b)$$
- Flux entrant : (faiblesse) $$\phi^{-}(a)=\frac{1}{n-1}\sum_{b\in A}\pi(b,a)$$
- Flux net : $$\phi(a)=\phi^{+}(a)-\phi^{-}(a)$$

PROMETHEE

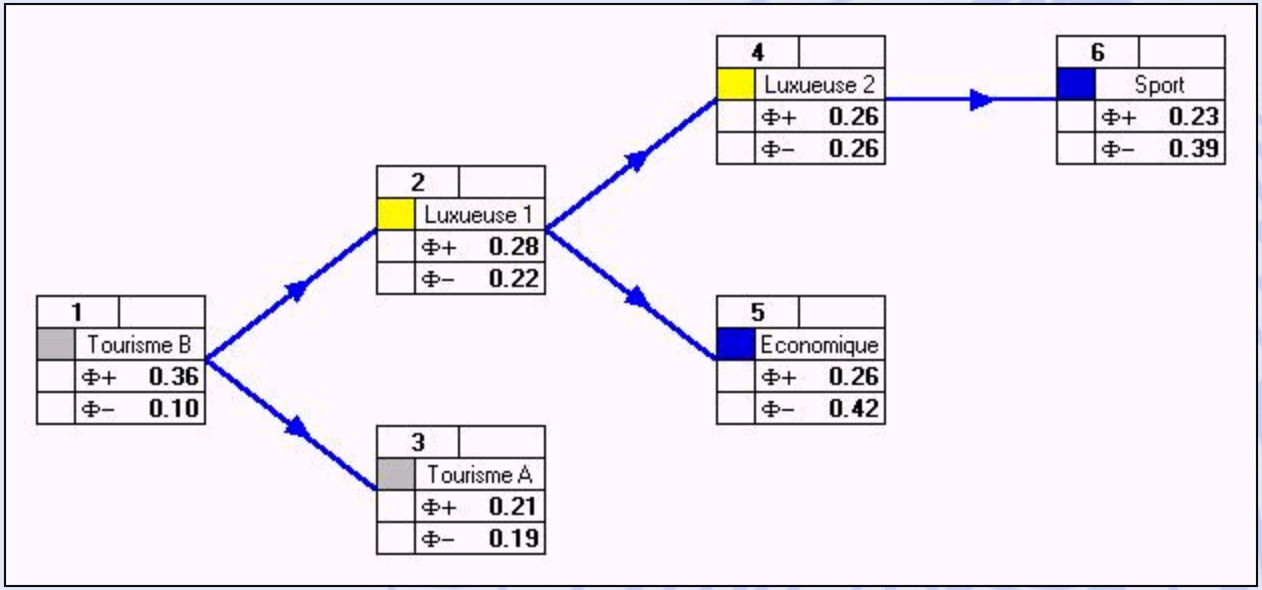
- Classer les décisions de la meilleure à la moins bonne
- Mettre en évidence les meilleurs compromis



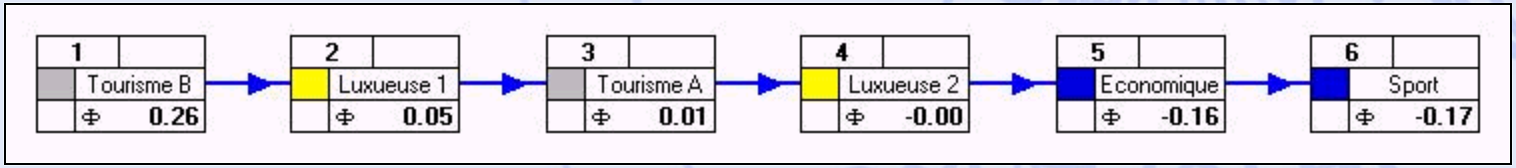


PROMETHEE

- PROMETHEE I : classement partiel ϕ^{+}, ϕ^{-}

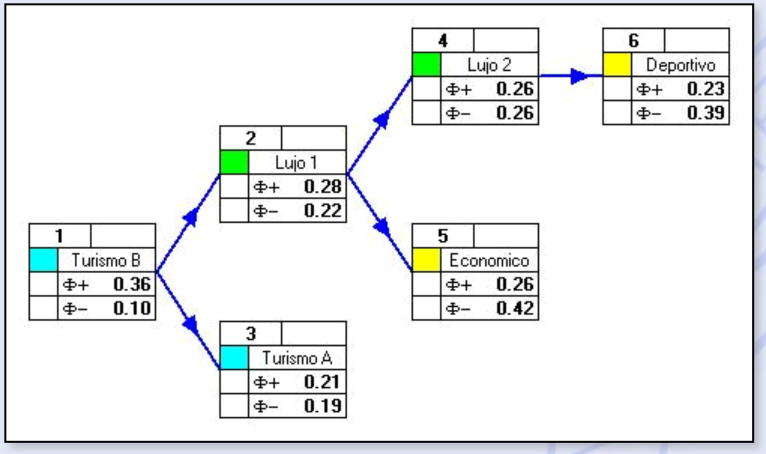


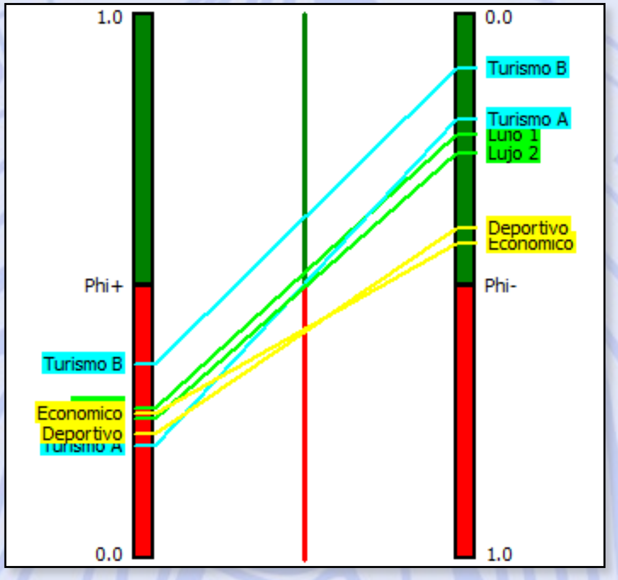
- PROMETHEE II : classement complet ϕ



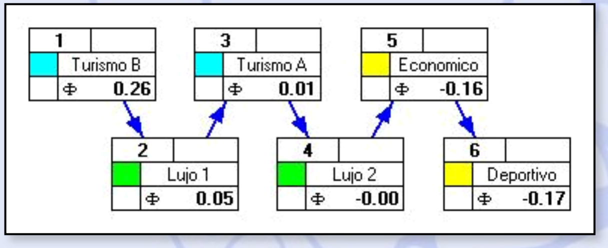
PROMETHEE I & II

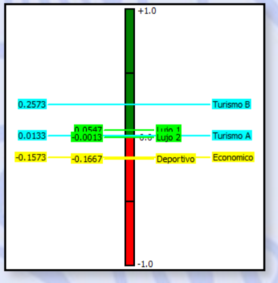
- PROMETHEE I : classement partiel – ϕ^{+}, ϕ^{-}



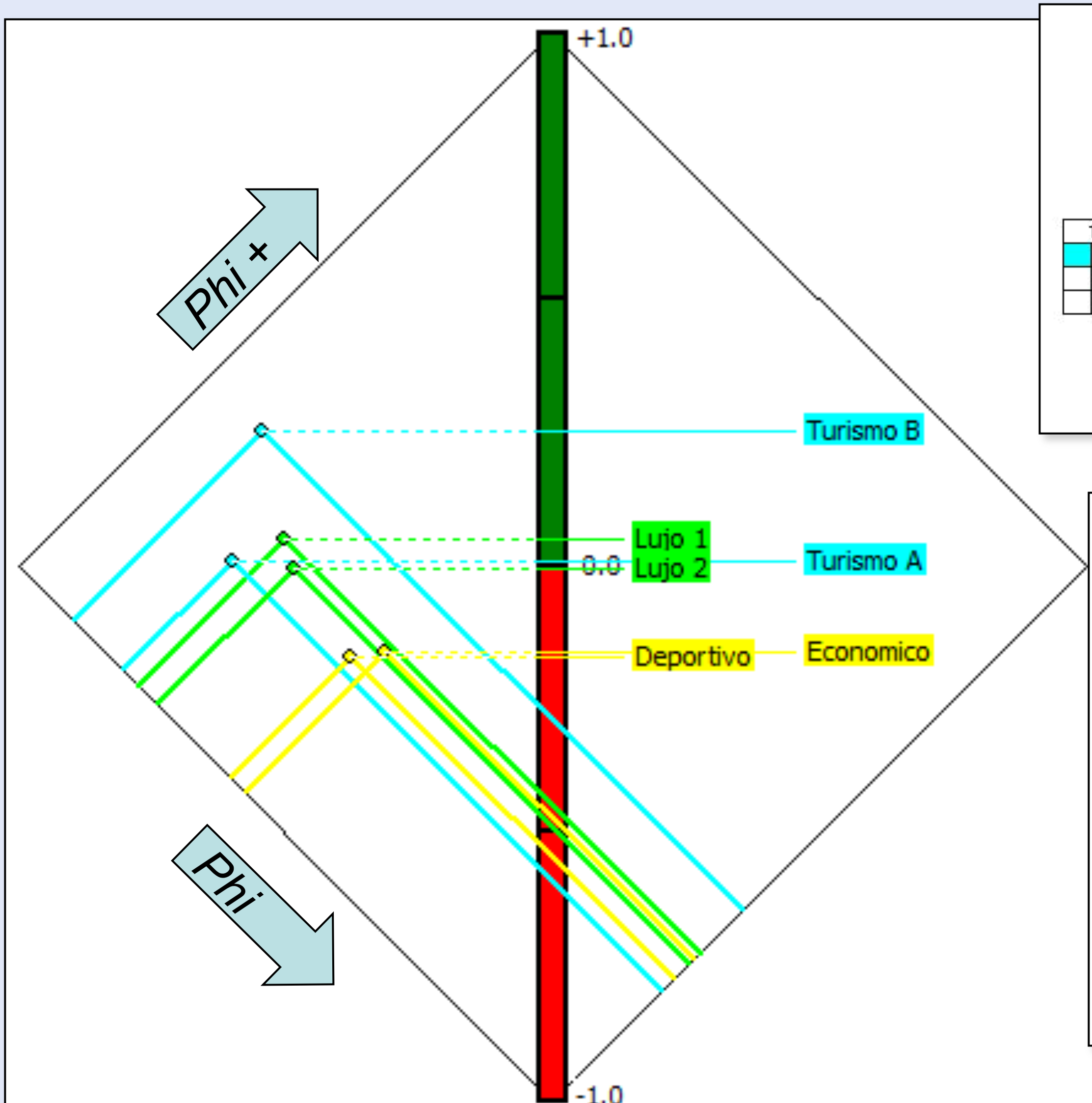


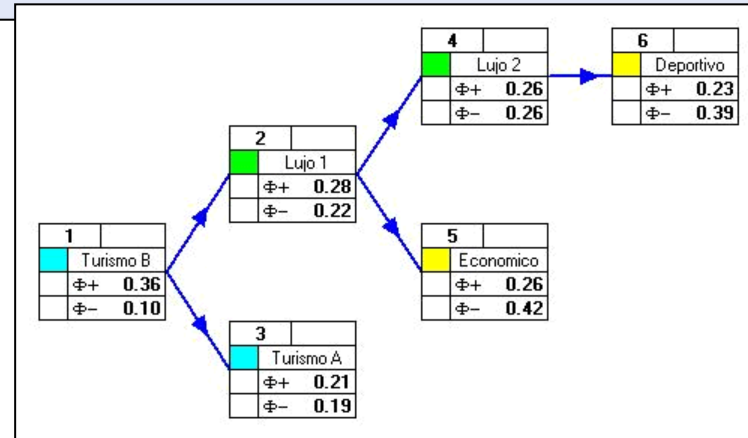
- PROMETHEE II : classement complet – ϕ

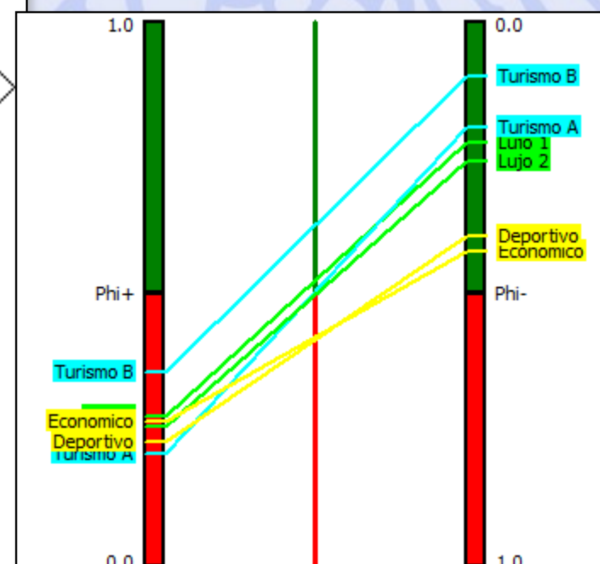




Diamant PROMETHEE



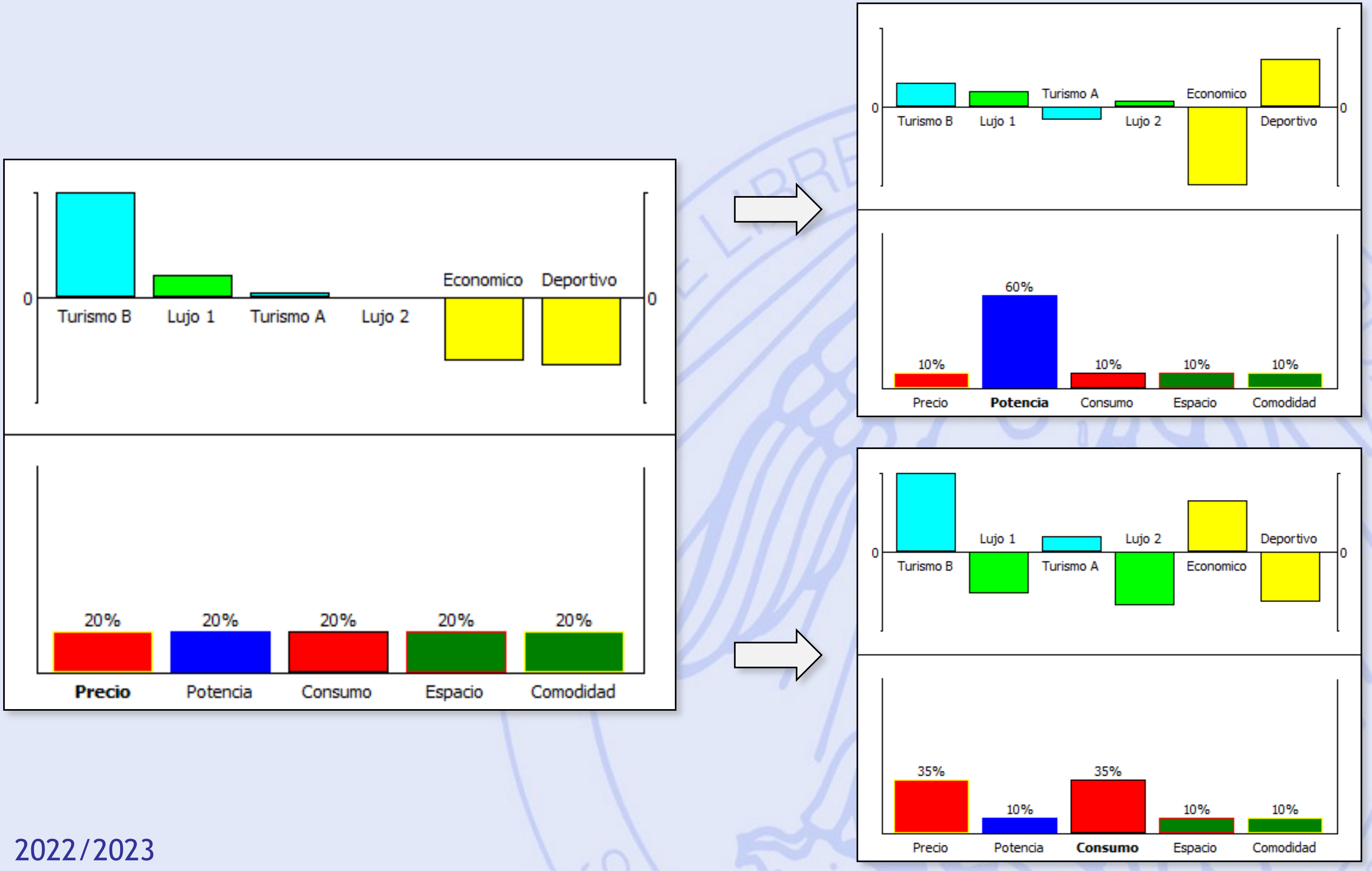




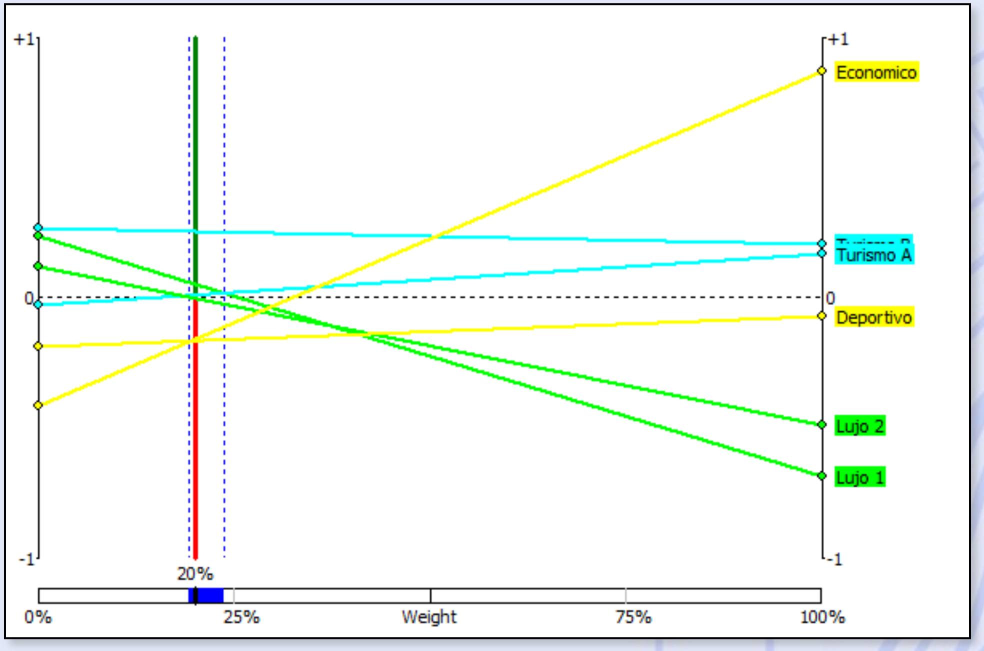
Analyse de Sensibilité avec PROMETHEE

- Poids des critères $\leftrightarrow$ classement PROMETHEE.
- Analyse de sensibilité interactive : « Walking Weights ».
- Robustesse par rapport aux poids ?
  - Intervalles de stabilité.
  - Intervalles de stabilité visuels.

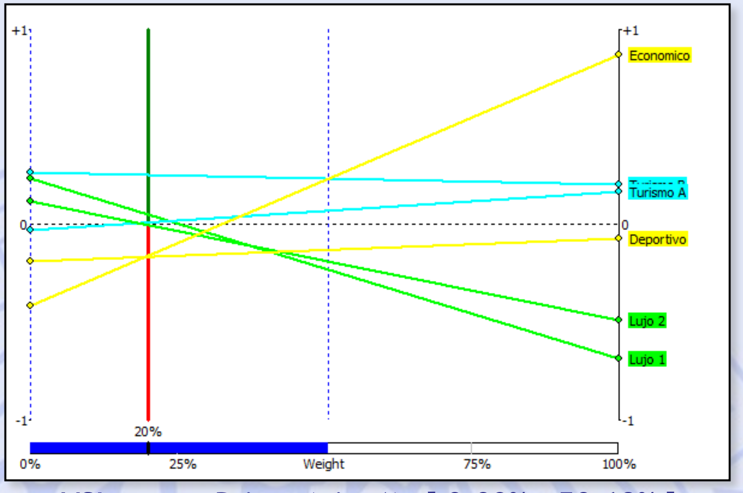
Walking Weights



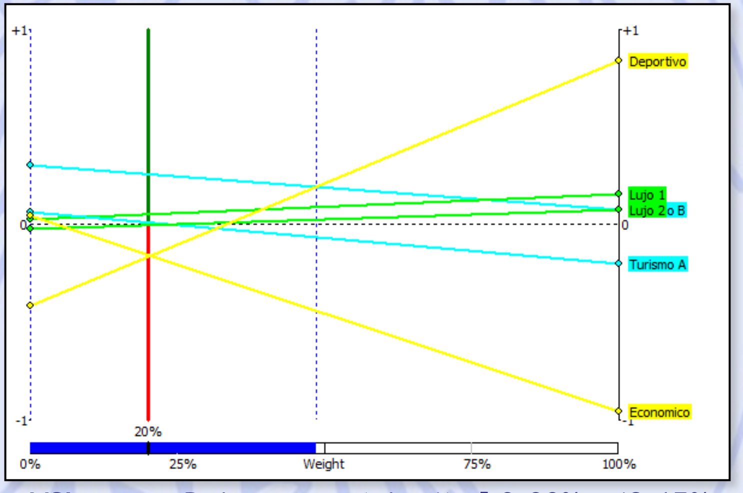
Visual Stability Intervals



VSI pour « Prix » (niveau 6):
[19.20% , 23.70%]

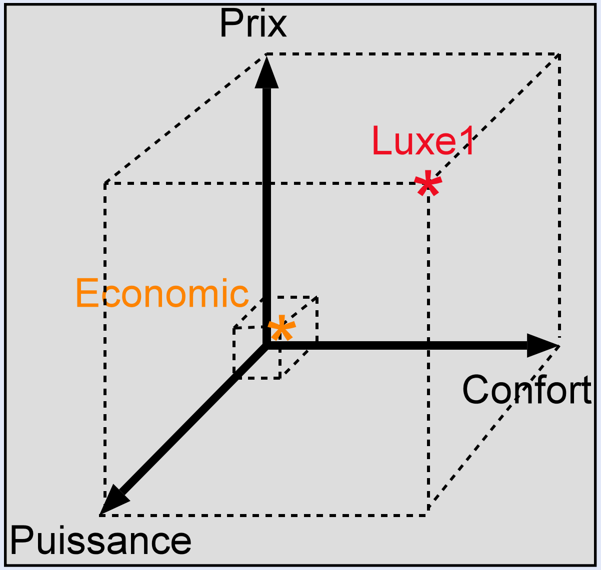


VSI pour « Prix » (niv. 1): [0.00% , 50.68%]



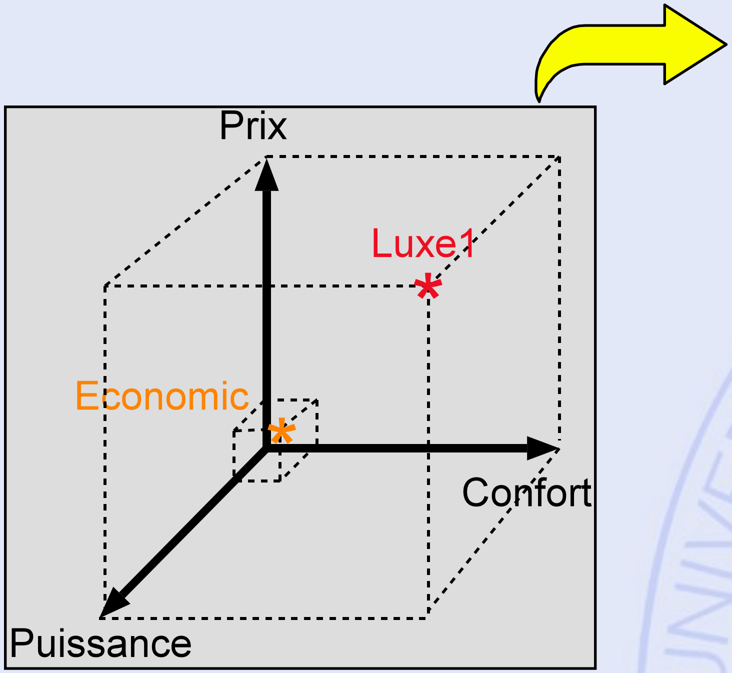
VSI pour « Puissance » (niv. 1): [0.00% , 48.65%]

GAIA

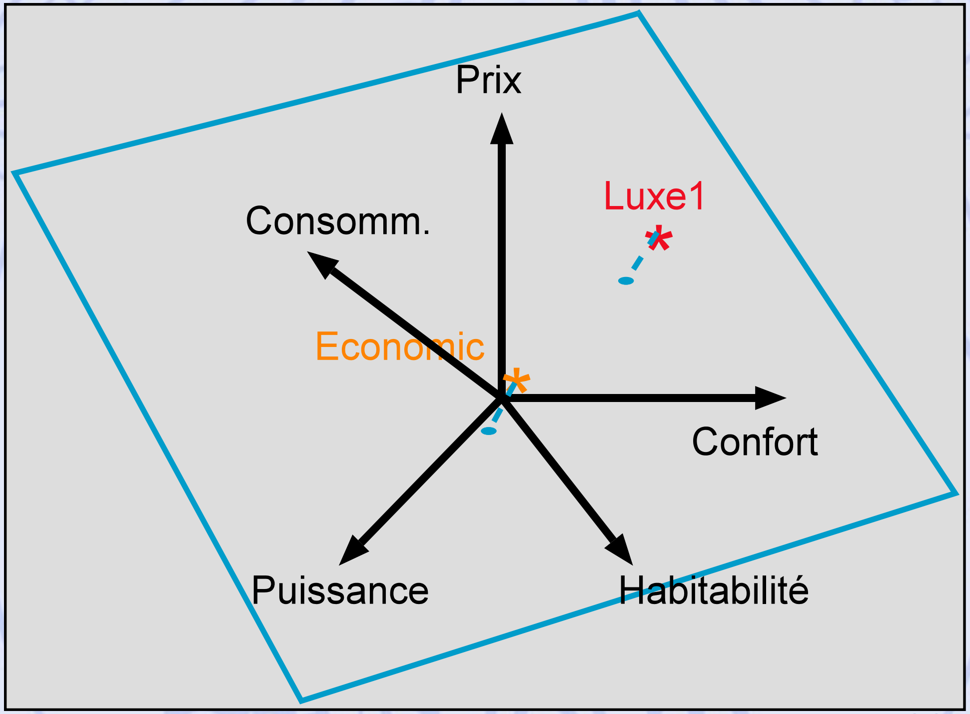


- Représentation graphique.
- 5 dimensions !

GAIA



1. ***Calcul des flux nets unicritères (normalisation)***
2. ***Projection sur un plan :***

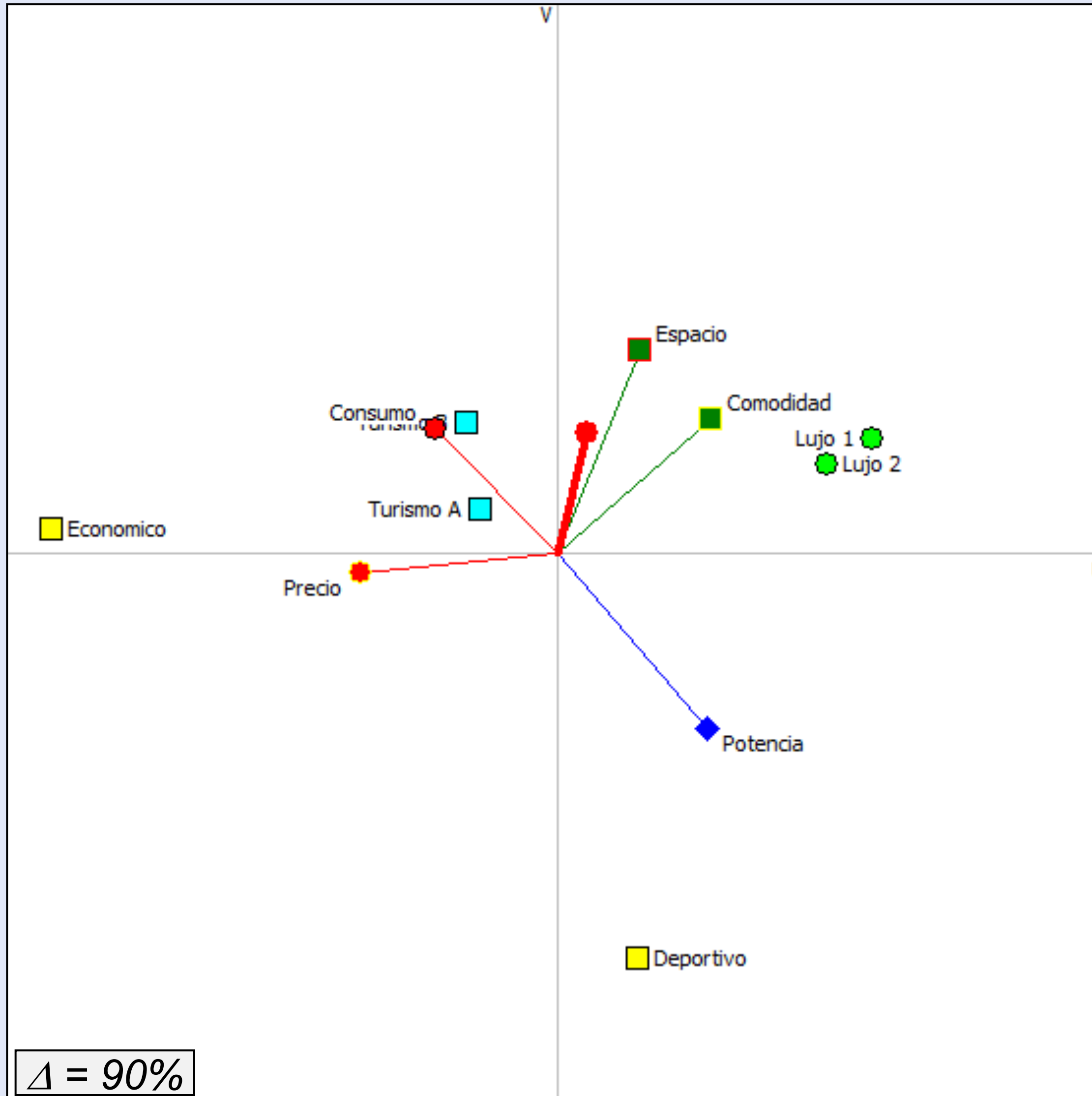


- Représentation graphique.
- 5 dimensions !

GAIA

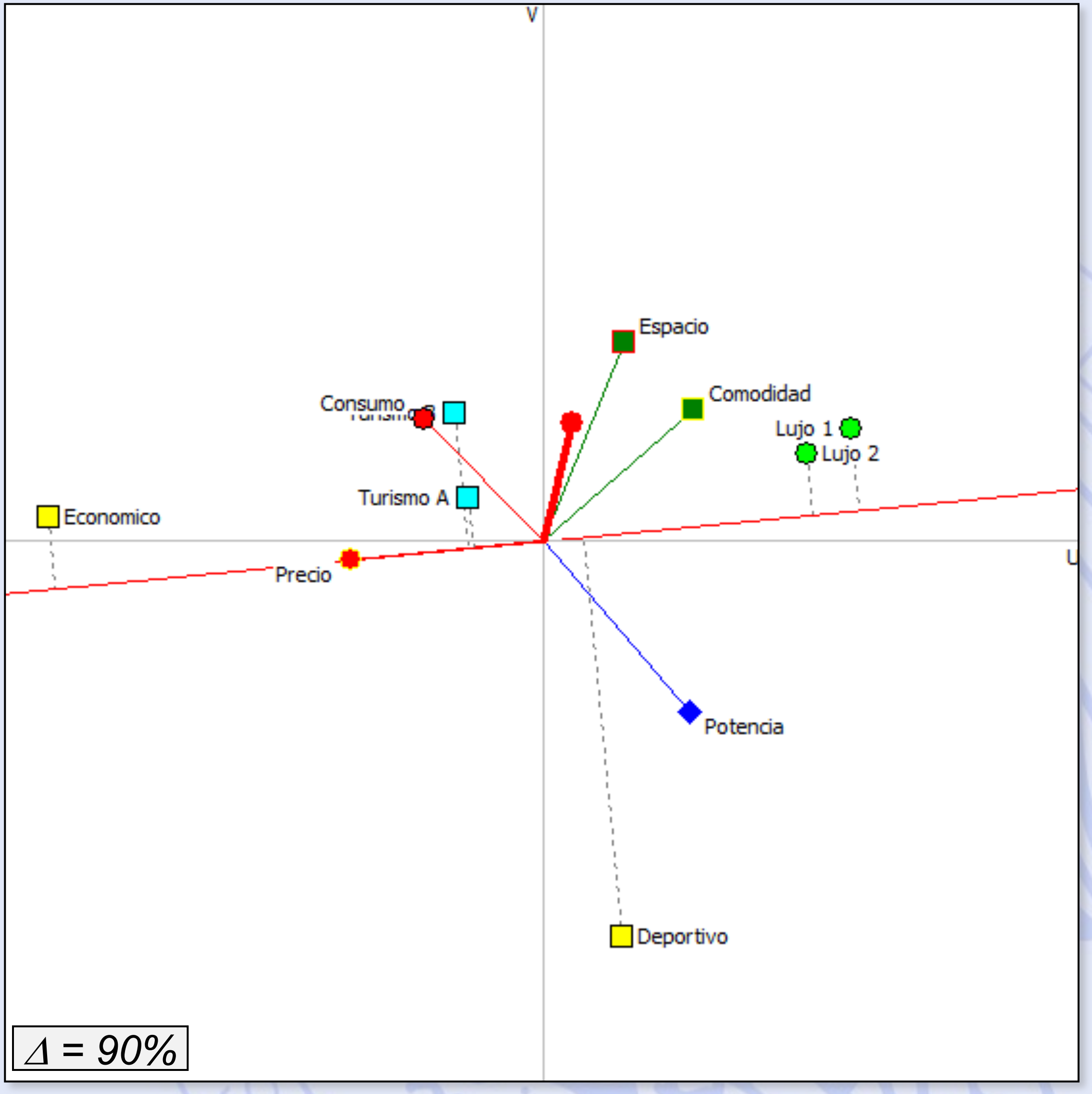
- Mettre en évidence les conflits entre critères.
- Identifier les compromis possibles.
- Aider à fixer les priorités.

GAIA



- *Actions : points*
- *Critères : axes*

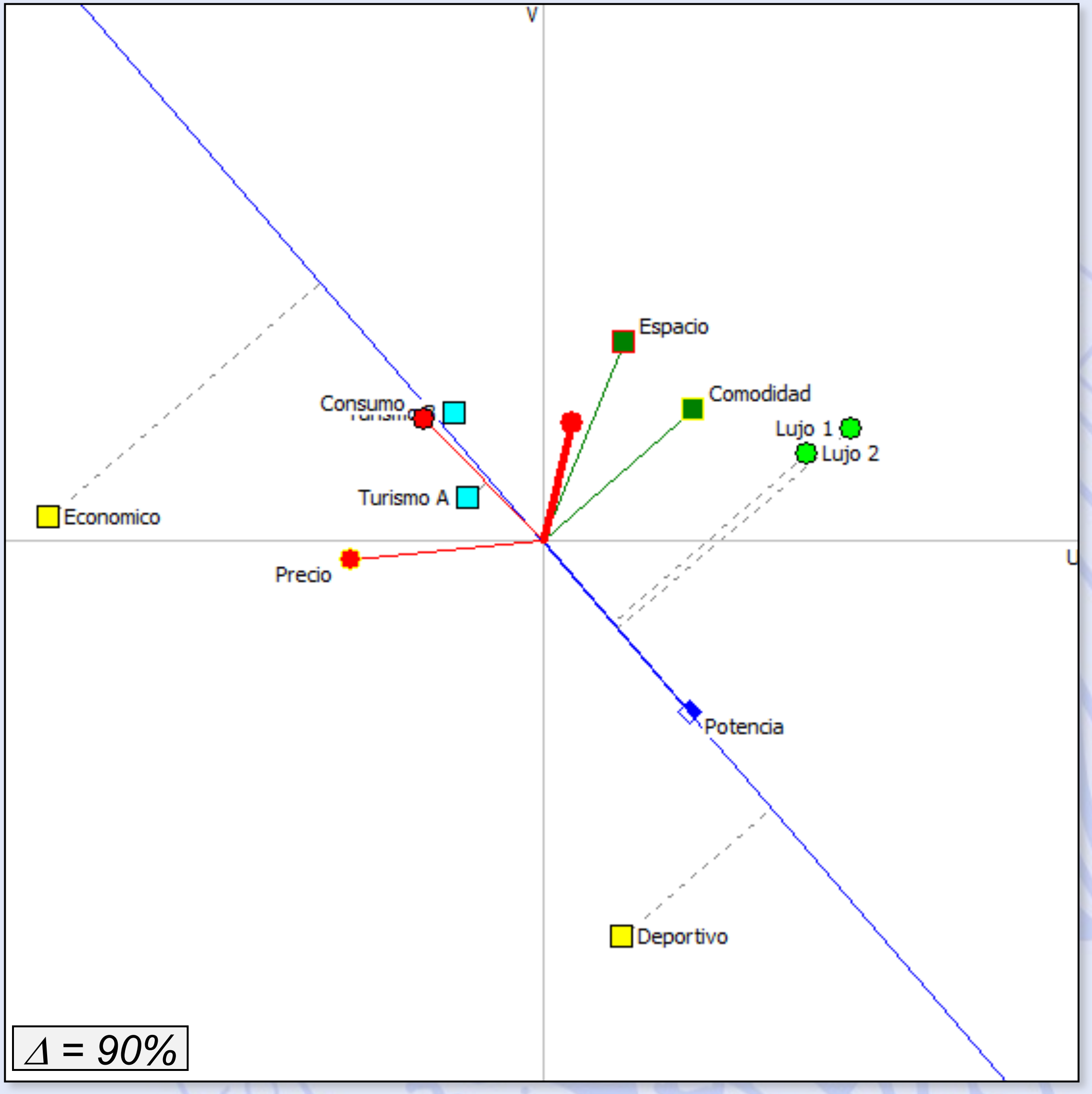
GAIA



Prix

- *Economico: 15 k€*
- *Turismo: 25,5-26 k€*
- *Deportivo: 29 k€*
- *Lujo: 35-38 k€*

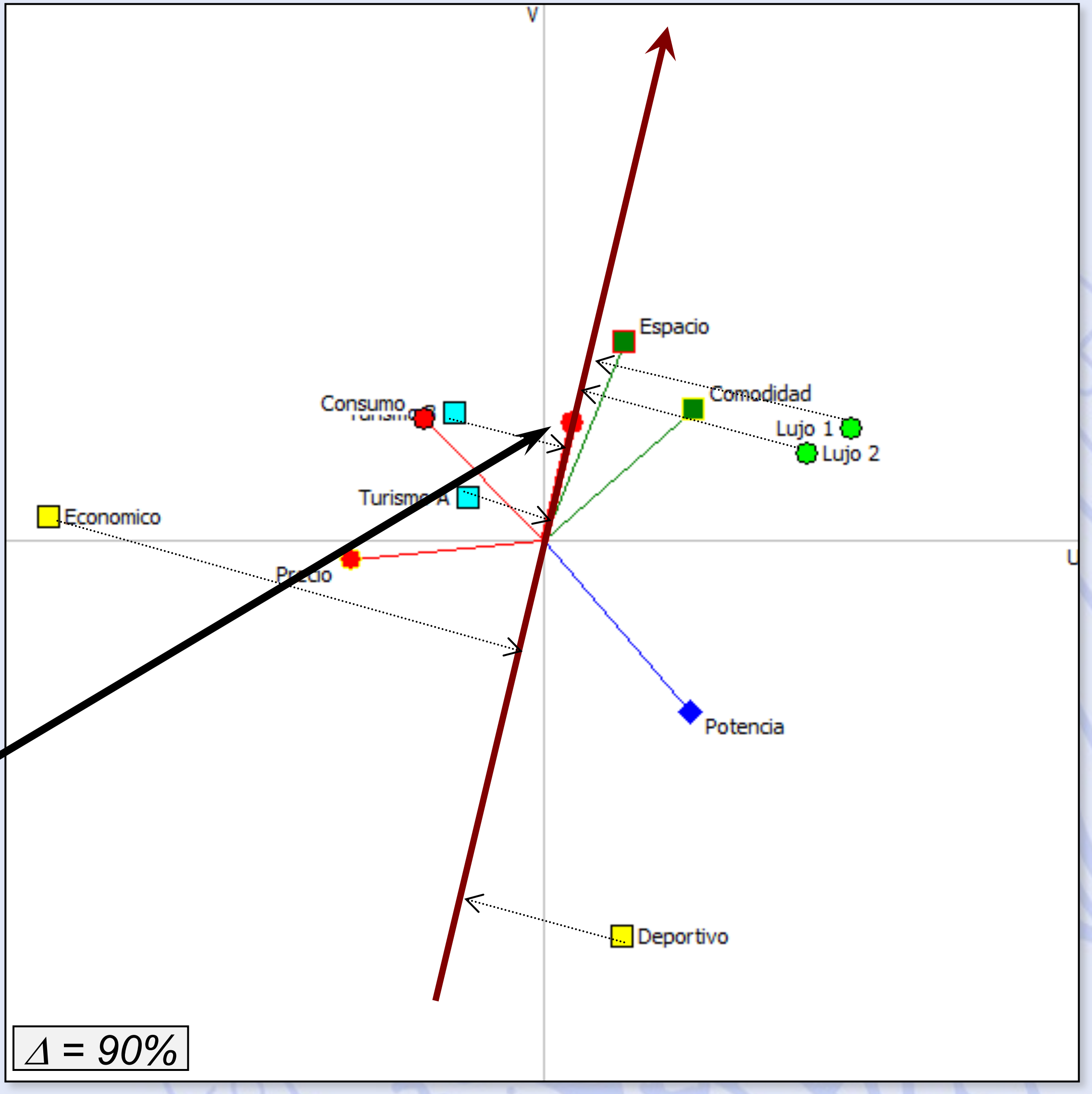
GAIA



Puissance

- *Deportivo: 110 kW*
- *Lujo: 85-90 kW*
- *Turismo: 75-85 kW*
- *Economico: 50 kW*

GAIA

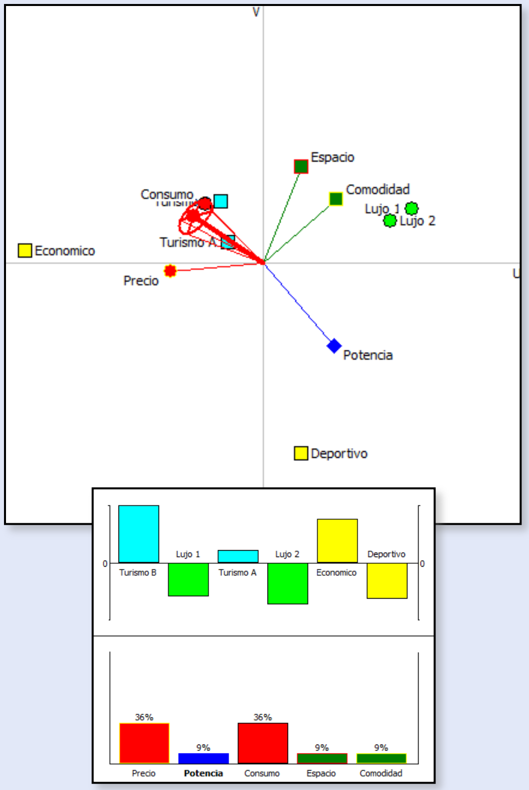


PROMETHEE II !

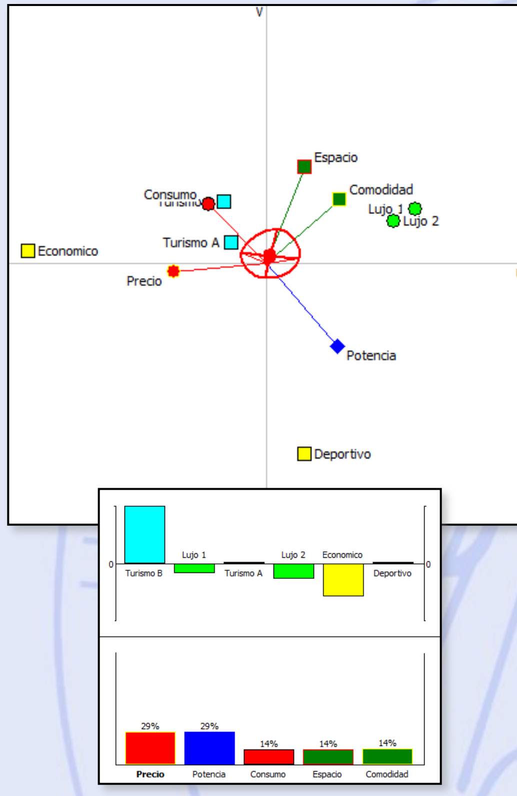
- *Turismo B : 0,26*
- *Lujo 1 : 0,06*
- *Turismo A : 0,02*
- *Lujo 2 : 0,00*
- *Economico : -0,15*
- *Deportivo : -0,17*

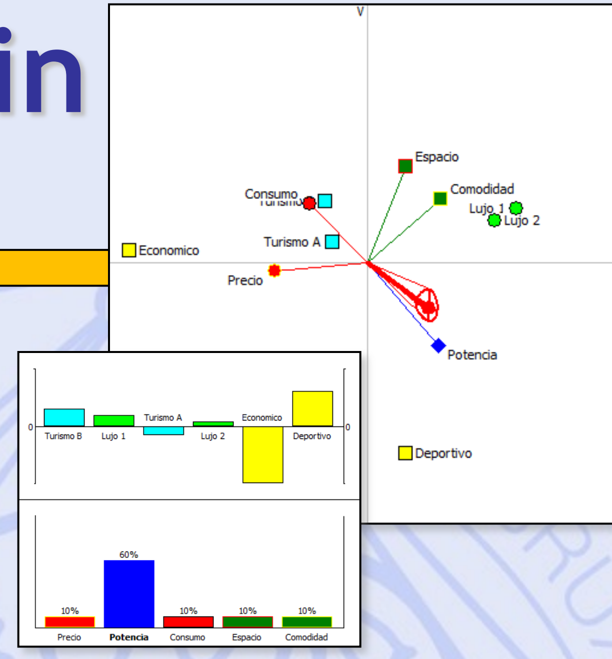
GAIA-Brain

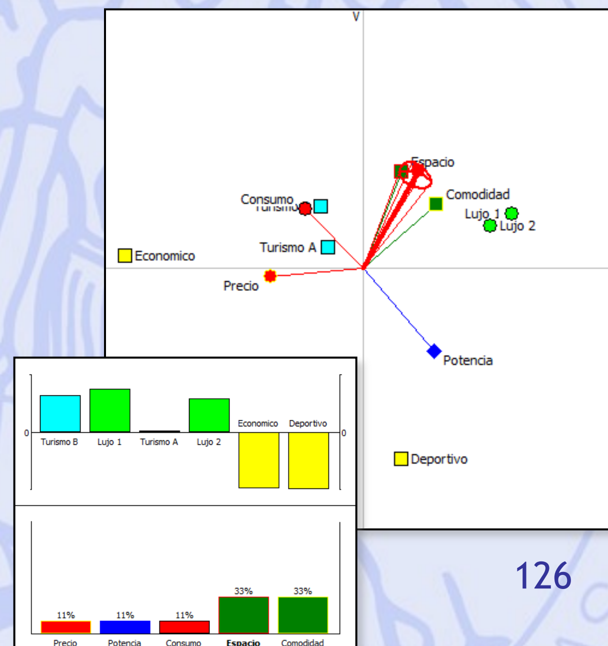
20 ans



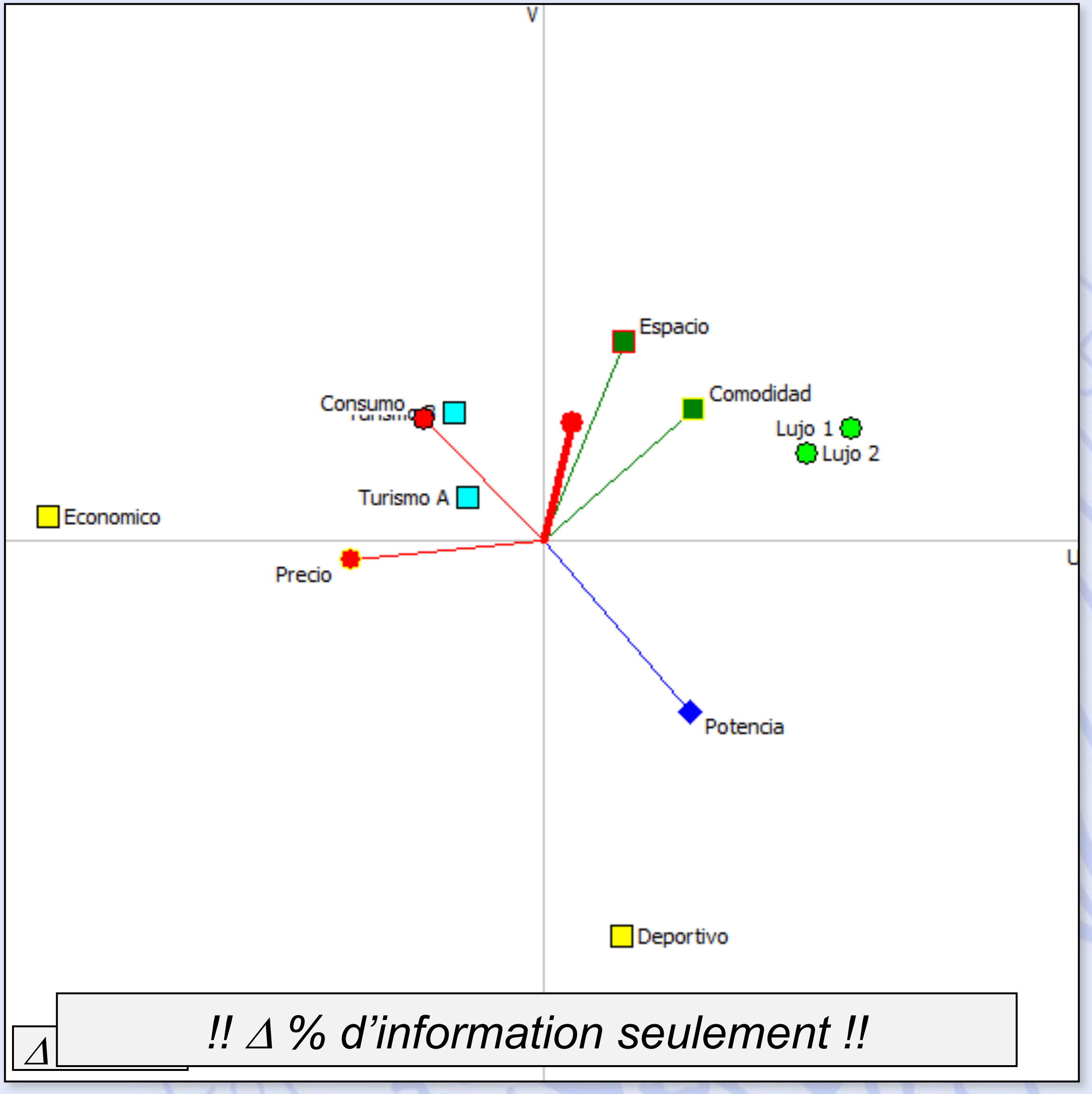
35 ans







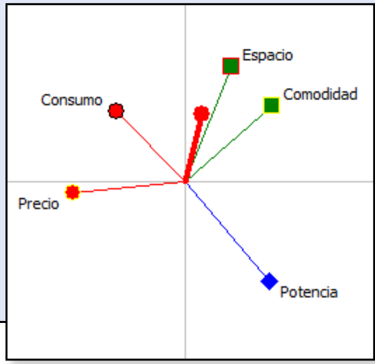
GAIA

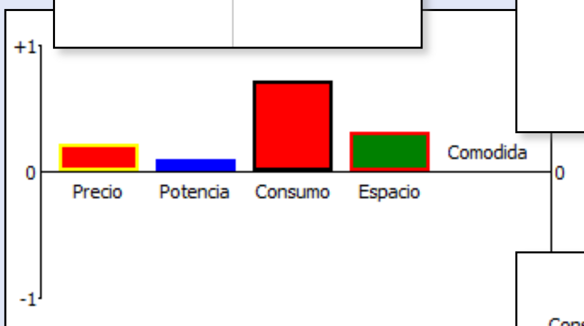


!! Δ % d'information seulement !!

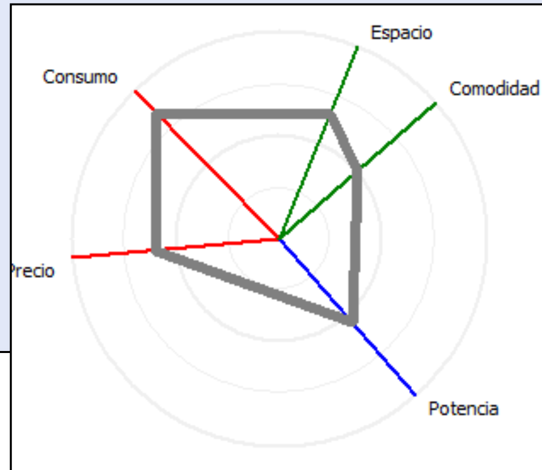
- *Actions : points*
- *Critères : axes*
- *Axe de décision*

GAIA Webs

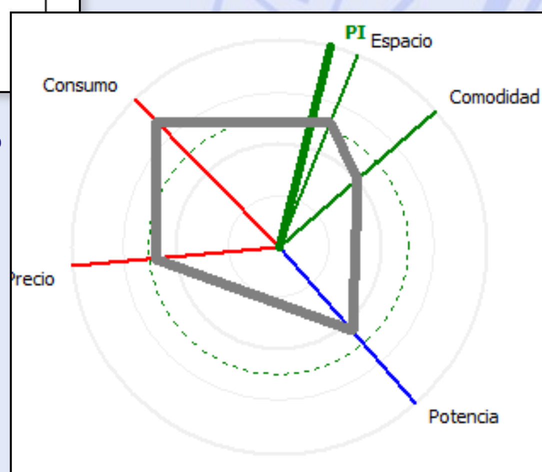


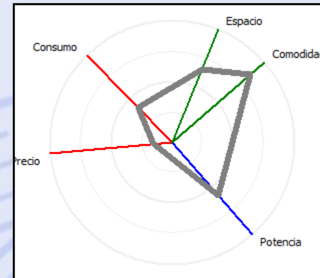


Action profile – Turismo B

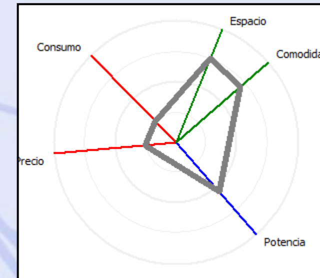


GAIA Web – Turismo B

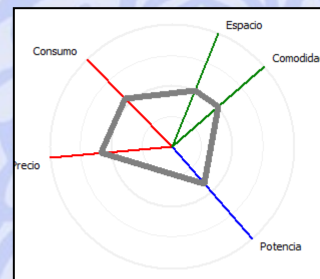




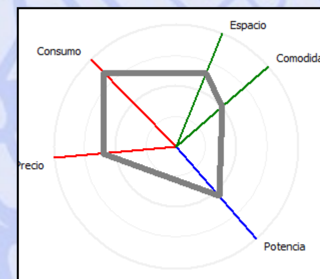
Lujo 1



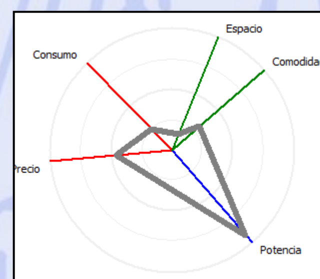
Lujo 2



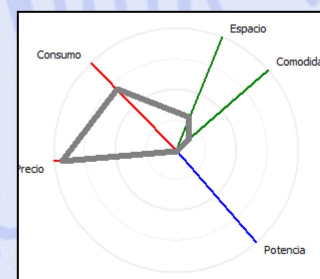
Turismo A



Turismo B



Deportes



Economico

Méthodes PROMETHEE & GAIA

- PROMETHEE : approche prescriptive
  - Classement partiel des actions
    - PROMETHEE I
  - Classement complet des actions
    - PROMETHEE II
- GAIA : approche descriptive
  - Identification des conflits entre critères.
  - Profils caractéristiques des actions.
  - Fixer les priorités, analyse de sensibilité.

Exemple 2 :
Localisation d'une usine

- Actions : 5 sites potentiels
- Critères :
  - f_1 : Coût (investissement)
  - f_2 : Coût (opérations)
  - f_3 : Emploi
  - f_4 : Transport
  - f_5 : Impact sur l'environnement
  - f_6 : Impact social

Tableau d'Evaluation

Tutorial2

	Investment	Operations	Employment	Transportation	Environment	Social
Min/Max	Minimize	Minimize	Minimize	Maximize	Minimize	Minimize
Weight	25.0000	15.0000	20.0000	20.0000	10.0000	10.0000
Preference Functi	Linear	Linear	Linear	Level	Level	Level
Indiference Thres	5.00 %	5.00 %	5.00 %	0.5000	0.5000	0.5000
Preference Thres	25.00 %	25.00 %	10.00 %	1.5000	1.5000	1.5000
Gaussian Thresh	-	-	-	-	-	-
Threshold Unit	Percent	Percent	Percent	Absolute	Absolute	Absolute
Unit	M$	M$	workers	5-point	Impact	Impact
Site 1	74.0000	12.0000	175.0000	Average	High	Low
Site 2	86.0000	9.0000	170.0000	Good	Low	Very Low
Site 3	89.0000	7.0000	145.0000	Very Good	Very Low	Moderate
Site 4	115.0000	8.0000	95.0000	Bad	Low	High
Site 5	128.0000	10.0000	110.0000	Good	Moderate	Very Low

Industrial | Political | Environment | Social

- Critères à minimiser ou maximiser.
- Echelles différentes.
- Critères quantitatifs ou qualitatifs.

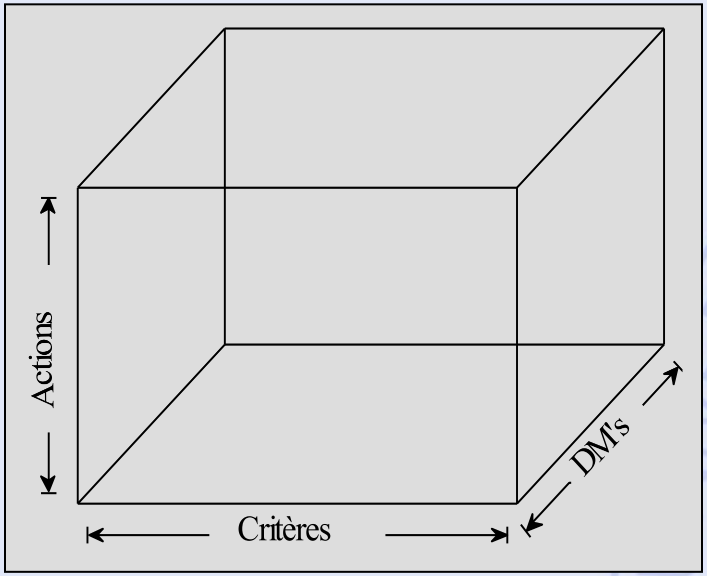
Problèmes de Décision Mono- et Multidécideur

- Monodécideur :
  - Une seule partie prenante dans le processus.
  - Evaluations et structure de préférence uniques.
- Multidécideur :
  - Plusieurs parties prenantes.
  - Evaluations et structures de préférences multiples.
  - Recherche d’un consensus.

Exemple

- Quatre parties prenantes ("décideurs") :
  - Industriel,
  - Pouvoirs publics (région),
  - Associations de protection de l'environnement,
  - Syndicats.
- Quatre tableaux multicritères.

Matrice Multicritère



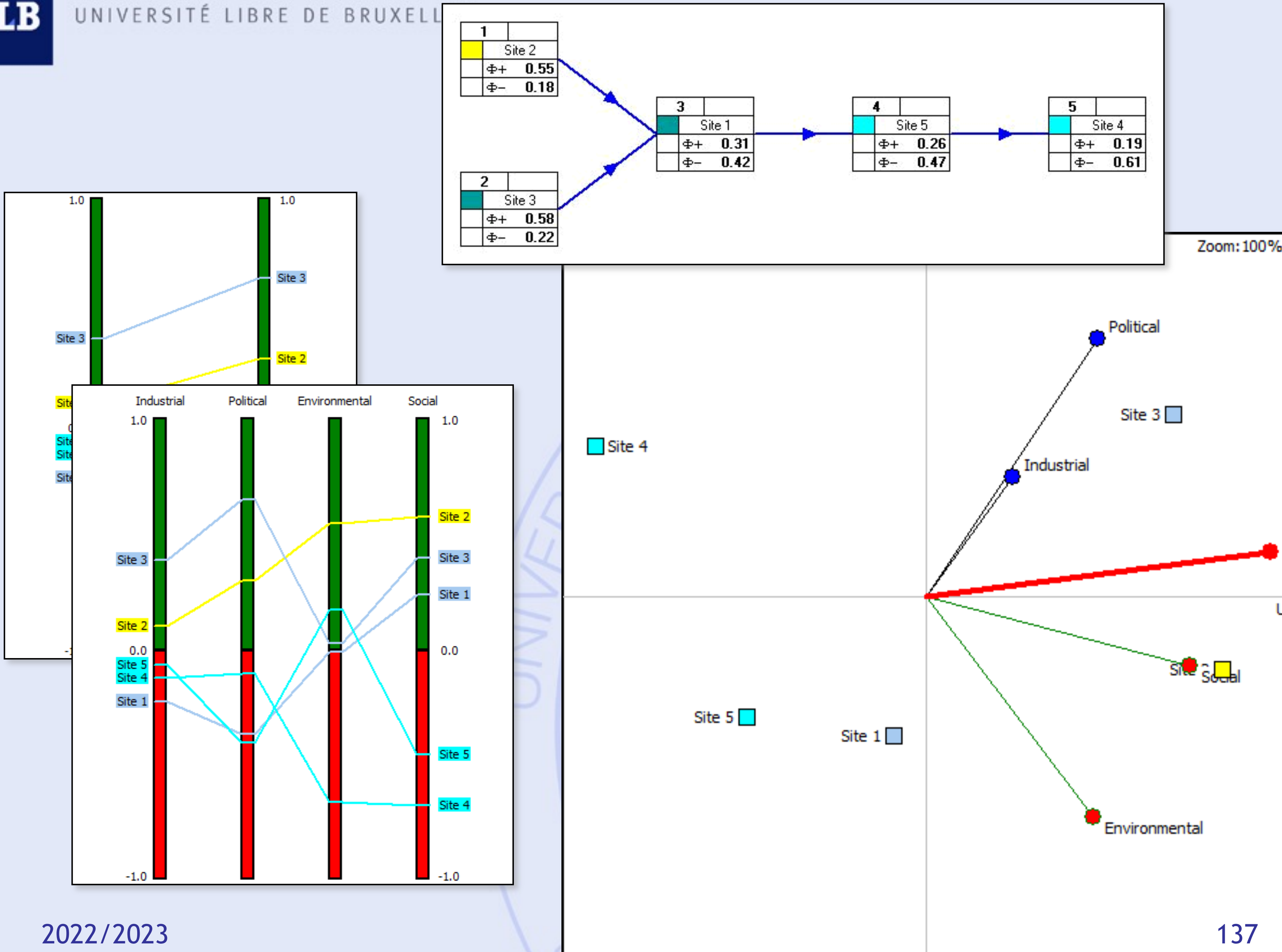
- Adapter les méthodes multicritères à la dimension multidécideur.
- Etudier les conflits entre décideurs.
- Aider à atteindre une solution de consensus.

Modèle Multi-scénarios

- Scénarios :
  - Points de vue,
  - Hypothèses de travail, …
- Evaluations :
  - Critères ‘objectifs’ : évaluations communes.
  - Critères ‘subjectifs’ : évaluations particulières à chaque scénario.
- Structures de préférences différentes :
  - Poids, seuils de préférence.

Modèle Multi-scénarios

- Adaptation de PROMETHEE :
  - Classements individuels
  - Classements globaux (groupe) en tenant compte d'une pondération éventuelle des scénarios
- Adaptation de GAIA :
  - GAIA-Critères
  - GAIA-Scénarios
  - GAIA-Unicritère



1
Site 2
Φ+ 0.55
Φ− 0.18
2
Site 3
Φ+ 0.58
Φ− 0.22
3
Site 1
Φ+ 0.31
Φ− 0.42
4
Site 5
Φ+ 0.26
Φ− 0.47
5
Site 4
Φ+ 0.19
Φ− 0.61
Industrial
Political
Environmental
Social
1.0
0.0
-1.0
Site 1
Site 2
Site 3
Site 4
Site 5
Zoom: 100%
Political
Industrial
Environmental
Social
U

Visual PROMETHEE

WWW.PROMETHEE-GAIA.NET

- 3-level simple hierarchical criteria structure.
- New visual tools:
  - PROMETHEE rankings and Diamond,
  - Visual Weight Stability Intervals,
  - Decision-maker's Brain (PROMETHEE VI),
  - GAIA-3D,
  - GAIA-Webs and PROMap GIS integration,
  - Performance (input-output) analysis, …

PROMap

- *Intégration avec Google Maps :*

Travail personnel

- Elaborer un problème de décision : min. 8 actions, 5 critères et 2 scénarios.
- Modéliser le problème avec PROMETHEE.
- Analyser le problème avec Visual PROMETHEE:
  - Classements PROMETHEE.
  - Analyse GAIA.
  - Analyse de sensibilité:
    - Poids des critères.
    - Différents scénarios.
  - Bonus: catégories, groupes, clusters, …

Etapes

1. Définir le problème :
   - Vérifier la faisabilité.
2. Définir les actions, critères et scénarios :
   - Echelles.
3. Modélisation des préférences :
   - Fonctions de préférences.
   - Pondération des critères.
4. Analyse critique :
   - Classements PROMETHEE.
   - GAIA.
   - Analyse de sensibilité (poids).
   - Analyse multi-scénarios.
   - Bonus (utilisation d'outils additionnels).
   - Conclusion.

Bonus

- Définition de catégories d'actions, de groupes et de clusters de critères.
- Utilisation d'outils supplémentaires :
  - Arc-en-ciel PROMETHEE,
  - Profils, GAIA-Webs,
  - Intervalles de stabilité,
  - PROMETHEE V,
  - GIS,
  - …

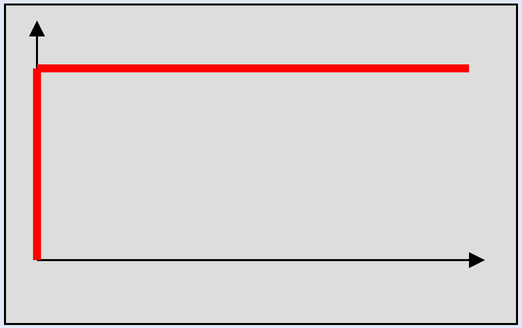
Pour utiliser PROMETHEE

1. Définir les actions :
   - Liste.
2. Définir les critères :
   - Quantitatifs,
   - Qualitatifs (choix de l'échelle).
3. Evaluer (tableau).
4. Pour chaque critère :
   - Choisir un type de fonction de préférence.
   - Fixer les seuils correspondants.
5. Pondérer les critères.

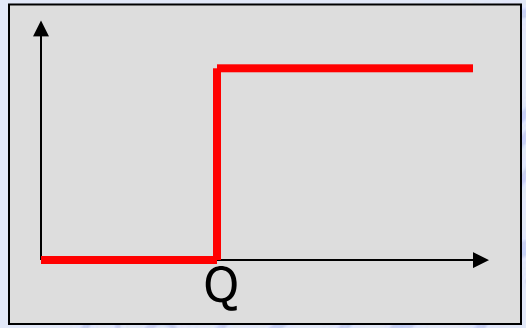
Critères qualitatifs & quantitatifs

- Critères quantitatifs :
  - Echelle numérique naturelle.
- Critères qualitatifs :
  - Echelle qualitative ordinale (ex: échelles de Likert).
  - Maximum 9 niveaux (7 ± 2) pour assurer une évaluation cohérente.
  - Présence d'un niveau neutre ?
  - Exemples:
    - Très bon, Bon, Moyen, Mauvais, Très mauvais
    - Oui, Non
    - ++, +, 0, -, --
    - ++, +, -, --
  - Echelle numérique sous-jacente (codage).

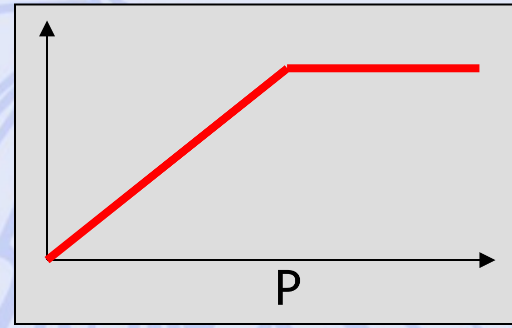
Fonctions de préférence
(disponibles dans Visual PROMETHEE)



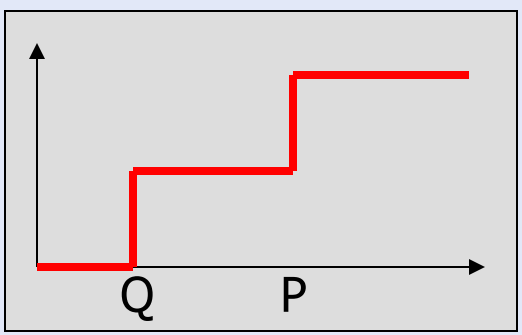
Usuelle



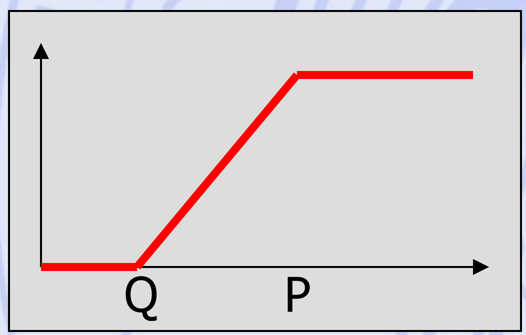
En « U »



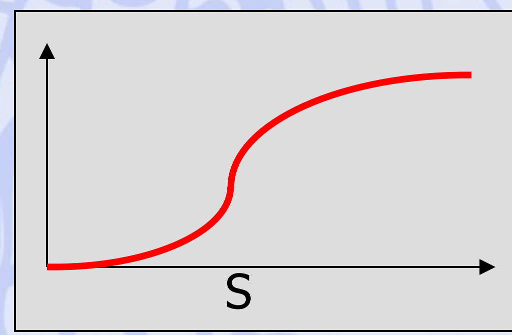
En « V »



A paliers



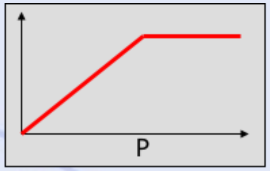
Linéaire



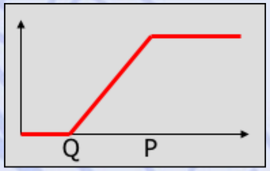
Gaussienne

Fonctions de préférence

- Critères quantitatifs « continus » (ex. coût, prix, distance):
  - En « V » (pas de seuil d'indifférence),
  - Linéaire.

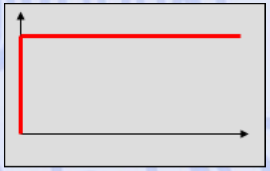


« V » shape

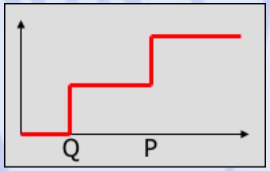


Linear

- Critères qualitatifs ou quantitatifs « discrets » (ex. « très bon à très mauvais », nombre d'hôpitaux):
  - Usuelle (pas de seuils),
  - A paliers.



Usual



Level

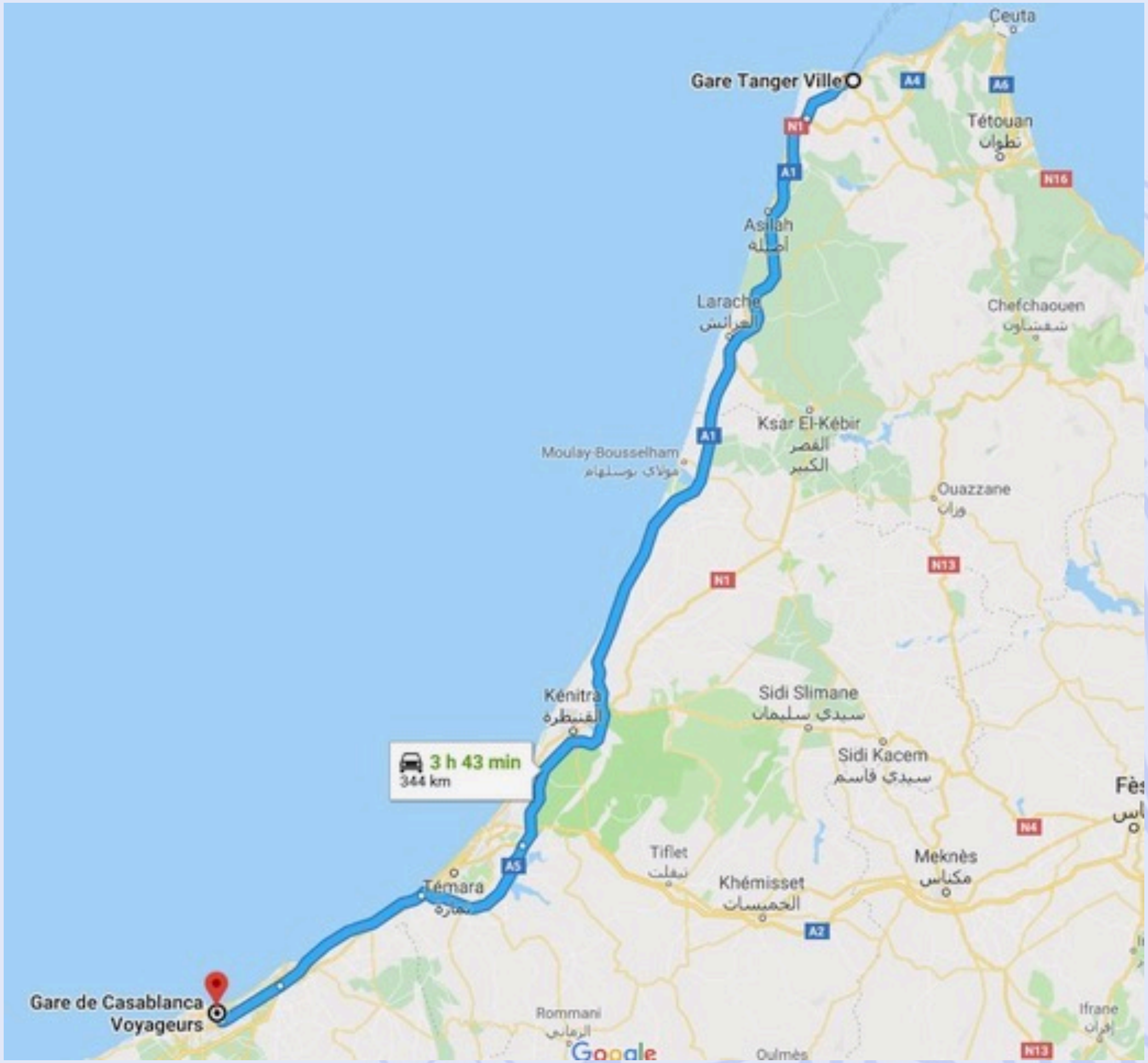
Un exemple… Pas à pas…

Construction

de la

LGV Tanger – Casablanca

LGV Tanger - Casablanca



LGV Tanger - Casa

https://www.oncf.ma/fr/Developpement/Grands-projets/Ligne-a-grande-vitesse-tanger-casablanca

- 22,9 milliards DH → impacts économiques.
- 344 km – 3h43 en auto → gain de temps.
- 12 viaducs, 2100 ha reboisés, réduction émissions GES
  → impacts environnementaux.
- 1800 ha de terrain, 250 ménages expropriés, emplois créés, moins de victimes sur les routes
  → impacts sociaux.
- **Choix du tracé ?**

Les données
(fictives - cas d'étude)

- Six tracés possibles : A, B, C, D, E et F
- Six critères :
  - Coût (en milliards de DH)
  - Vitesse commerciale (en km/h)
  - Nombre d'ouvrages d'art (viaducs, ...)
  - Nombre de ménages expropriés
  - Nombre d'emplois créés
  - Impact environnemental (qualitatif – 5 pts)
- Deux scénarios :
  - Gouvernement
  - ONCF (chemins de fer marocains)

Les actions

- Six tracés possibles :
  - A, B, C, D, E, F
- Deux catégories en fonction de l'orientation du tracé :
  - Ouest :
    - A, B, D
  - Est :
    - C, E, F

Les critères

- Coût
  - Quantitatif – monétaire (milliards de DH)
- Vitesse commerciale
  - Quantitatif (km/h)
- Ouvrages d'art
  - Quantitatif – discret (nombre – de 9 à 14)
- Expropriations
  - Quantitatif (nombre de ménages)
- Emplois créés
  - Quantitatif (nombre d'emplois)
- Impact environnemental
  - Qualitatif (5 pts – de très faible à très élevé)

Plan du cours

1. Introduction
   - Contenu du cours
2. Logique mathématique
   - Calcul propositionnel
   - Calcul des prédicats
   - Logique floue et aide à la décision
3. Récurrence et induction
4. Analyse d'algorithmes
   - Comparaison asymptotique de fonctions
   - Complexité
5. Mathématique de la gestion
   - Théorie des graphes
   - Optimisation

Récurrence

- Propositions construites à partir d’un prédicat de poids 1 et du quantificateur universel :

$$\forall n : P(n)$$

- Exemple :

$$\forall n \geq 0 :\ 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Démonstration par récurrence.

Principe d'induction faible

- Soit $P(n)$ un prédicat de poids 1 dont l'univers est ***N***.
- Si $P(0)$ est vraie et si

$$\forall n : (P(n) \rightarrow P(n+1))$$

est vraie, alors

$$\forall n : P(n)$$

est une proposition vraie.

Principe d'induction faible

- Exemple :
  - $P(0)$ est vraie (évident).
  - Supposons $P(n)$ vraie :

$$0+1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

alors :

$$\begin{aligned}0+1+2+\ldots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Principe d'induction faible

- Variante : Soient $P(n)$ un prédicat de poids 1 dont l'univers est ***N*** et d un nombre naturel.
- Si $P(d)$ est vraie et si

$$\forall n \geq d : \left(P(n) \rightarrow P(n+1)\right)$$

est vraie, alors

$$\forall n \geq d : P(n)$$

est une proposition vraie.

Principe d'induction forte

- Soit $P(n)$ un prédicat de poids 1 dont l'univers est ***N***.
- Si $P(0)$ est vraie et si

$$\forall n : ((P(0) \wedge P(1) \wedge \ldots \wedge P(n)) \rightarrow P(n+1))$$

est vraie, alors

$$\forall n : P(n)$$

est une proposition vraie.

Principe d'induction forte

- Variante : Soient $P(n)$ un prédicat de poids 1 dont l'univers est $\mathbb{N}$ et d un nombre naturel.
- Si $P(d)$ est vraie et si

$$\forall n \geq d : ((P(d) \wedge \ldots \wedge P(n)) \rightarrow P(n+1))$$

est vraie, alors

$$\forall n \geq d : P(n)$$

est une proposition vraie.

Principes d'induction

- Les deux principes d'induction sont équivalents.
- Le principe d'induction forte peut se généraliser à d'autres ensembles que $\mathbb{N}$.
- Le principe d'induction forte est parfois plus facile à utiliser dans les démonstrations.

Exemple

- Montrer que :

est vrai pour $n>2$