

Mathématique

Bertrand Mareschal

bmaresc@ulb.ac.be

<http://homepages.ulb.ac.be/~bmaresc/math-umons.html>

Plan du cours

1. Introduction

- Contenu du cours

2. Logique mathématique

- Calcul propositionnel
- Calcul des prédicats
- Logique floue et aide à la décision

3. Récurrence et induction

4. Analyse d'algorithmes

- Comparaison asymptotique de fonctions
- Complexité

5. Mathématique de la gestion

- Théorie des graphes
- Optimisation

1. Introduction

- Présentations et documents disponibles sur la page web du cours.
- Optionnel: Livres de référence:
 - G. Haggard, J. Schlipf et S. Whitesides (2006): **Discrete Mathematics for Computer Science**, Thomson Brooks/Cole, ISBN: 9-780534-495015
 - S. Lipschutz (1983): **Mathématiques pour informaticiens**, série Schaum, McGraw Hill, ISBN: 2-7042-1067-5
 - R. Sedgewick et P. Flajolet (1996): **Introduction à l'analyse des algorithmes**, International Thomson Publishing, ISBN: 2-84180-957-9
- Evaluation :
 - Projet personnel (aide à la décision)
 - Examen écrit en deux parties : théorie (sans notes) et exercices (à livre ouvert).

Plan du cours

1. Introduction

- Contenu du cours

2. Logique mathématique

- Calcul propositionnel
- Calcul des prédicats
- Logique floue et aide à la décision

3. Récurrence et induction

4. Analyse d'algorithmes

- Comparaison asymptotique de fonctions
- Complexité

5. Mathématique de la gestion

- Théorie des graphes
- Optimisation

2. Logique mathématique

- Logique classique :
 - Un énoncé a 2 valeurs de vérité possibles :
 - Vrai (V) ou faux (F).
 - Calcul propositionnel.
 - Calcul des prédicats.
- Logique floue :
 - Un énoncé peut être « plus ou moins » vrai ou faux.
 - Application en aide à la décision.

Calcul propositionnel

- **Énoncé :**
 - 2 valeurs de vérité possibles : V (vrai) ou F faux)
 - *Exemples :*
 - Paris est en France.
 - Charleroi est au nord de Bruxelles.
 - $2 + 2 = 5$
 - *Attention :*
 - Où allez-vous ? (n'est pas un énoncé)
- **Énoncé composé :** sous-énoncés connectés à l'aide d'opérateurs logiques.
- **Proposition :** énoncé composé faisant intervenir des variables (p, q, r, \dots)

Conjonction logique - « et »

- Conjonction de deux propositions p et q :

$$p \wedge q$$

- Table de vérité :

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjonction logique - « ou »

- Disjonction de deux propositions p et q :
« ou » non exclusif $p \vee q$
- Table de vérité :

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Négation logique - « non »

- Négation d'une proposition p :
« il est faux que... » $\neg p$
- Table de vérité :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Table de vérité d'une proposition

- Exemple : $\neg(p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Propositions particulières

- **Tautologie :**
 - Proposition qui est toujours vraie (V partout dans la dernière colonne de la table de vérité).
- **Contradiction :**
 - Proposition qui est toujours fausse (F partout dans la dernière colonne de la table de vérité).
- **Exemples :**
 - Tautologie :
 - Contradiction :

$$p \vee \neg p$$

$$p \wedge \neg p$$

Equivalence logique

- Deux propositions P et Q sont logiquement équivalentes si elles ont des tables de vérité identiques : $P \equiv Q$
- Exemple : $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$		p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F		V	V	F	F	F
V	F	F	V		V	F	F	V	V
F	V	F	V		F	V	V	F	V
F	F	F	V		F	F	V	V	V

Algèbre des propositions (1)

- Lois idempotentes :

$$p \vee p \equiv p \qquad p \wedge p \equiv p$$

- Lois d'associativité :

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

- Lois de commutativité :

$$p \vee q \equiv q \vee p \qquad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Algèbre des propositions (2)

- Lois de distributivité :

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

- Lois d'identité :

$$p \vee f \equiv p$$

$$p \wedge t \equiv p$$

$$p \vee t \equiv t$$

$$p \wedge f \equiv f$$

(t : tautologie, f : contradiction)

Algèbre des propositions (3)

- Lois de complémentarité :

$$p \vee \neg p \equiv t$$

$$p \wedge \neg p \equiv f$$

$$\neg t \equiv f$$

$$\neg f \equiv t$$

- Loi d'involution :

$$\neg \neg p \equiv p$$

- Lois de de Morgan :

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Enoncé conditionnel

- « Si p , alors q » : $p \rightarrow q$
 - p implique q , p seulement si q
- Table de vérité :

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Enoncé biconditionnel

- « p si et seulement si q » : $p \leftrightarrow q$
- Table de vérité :

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Propriétés

- En fonction des opérateurs logiques :

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

- Contraposée :

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

Exemples

- Si j'étudie, je réussis mon examen.
- Si je réussis mon examen, c'est que j'ai étudié.
- Si je ne réussis pas mon examen, c'est que je n'ai pas étudié.
- Si je n'étudie pas, je ne réussis pas mon examen.

- Si A est un triangle équilatéral, A est isocèle (V).
- Si A est un triangle isocèle, A est équilatéral (F).