Plan du cours

1. Introduction
   - Historique, modélisation
2. Aide multicritère à la décision
   - Choix social
   - Méthodes PROMETHEE et GAIA
3. Optimisation multiobjectif

Programmation linéaire multiobjectif (MOLP)

- Modèle
- Dominance et efficacité
- Notions de base
- Méthodes

Modèle (MOLP)

- ***Optimiser*** (max ou min) k fonctions objectifs linéaires (critères) de n ***variables de décision*** $x_1, x_2, \dots, x_n$ sur un ***domaine réalisable*** D défini par m contraintes linéaires :

$$Max\ z_1, z_2, \cdots, z_k$$
$$z_j = c^j x \quad c^j, x \in \mathbb{R}^n \quad j = 1, \cdots, k$$
$$D = \{x: Ax \leq b, x \geq 0\} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad b \in \mathbb{R}^m$$

Problème mathématiquement mal posé.

Un exemple simple

(source : Zoubir Ramdani - z.ramdani@univ-bba.dz)

- Un artisan menuisier fabrique des portes et des fenêtres pour le compte d'un entrepreneur.
- L'artisan travaille 8 heures par jour.
- Toutes les portes et toutes les fenêtres sont de mêmes dimensions.
- La fabrication d'une porte nécessite une heure de travail et celle d'une fenêtre 90 minutes.
- L'artisan doit fabriquer au moins deux articles par jour, mais pas plus de 5 portes ou de 4 fenêtres par jour.
- Les bénéfices nets sont de 3000 DZD (dinars) pour une porte et 2000 DZD pour une fenêtre. La fabrication d'une porte cause une perte (déchet de bois) de 6 dm^2 et de 5 dm^2 pour une fenêtre.

Un exemple simple

(source : Zoubir Ramdani - z.ramdani@univ-bba.dz)

- L'artisan souhaite maximiser ses bénéfices et minimiser ses déchets.
- Modélisation de ce problème sous forme d'un MOLP :
  - Variables de décision :

$$x_1 \; portes\; par\; jour \; \geq 0 \;\; et \;\; x_2 \; fenêtres\; par\; jour \; \geq 0$$

  - Contraintes :

$$x_1 + {}^{3}/_{2}\, x_2 \leq 8$$
$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$x_1 \leq 5 \quad x_2 \leq 4$$

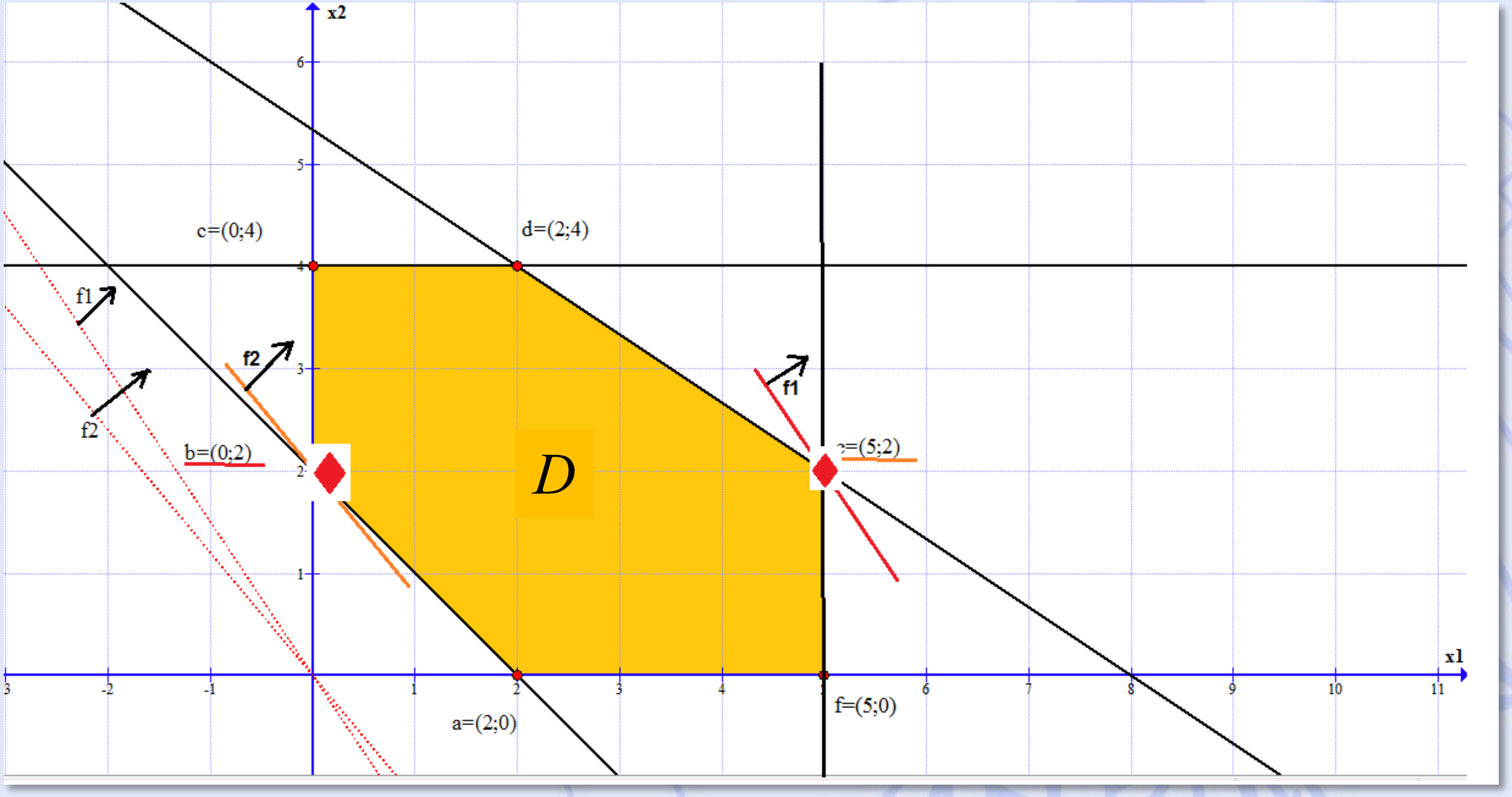
  - Fonctions objectifs :

$$\max f_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \quad bénéfices\; (kDZD)$$
$$\min f_2(x_1, x_2) = 6x_1 + 5x_2 \quad déchets\; (dm2)$$

Un exemple simple

(source : Zoubir Ramdani - z.ramdani@univ-bba.dz)

- Domaine réalisable :



Dominance et efficacité

- Image de D dans l'espace des critères :

$$Z = \{z(x) = (z_1(x), \cdots, z_k(x)) \in \mathbb{R}^k ; x \in D\}$$

- Relation de dominance :

$$\forall z, z' \in Z : z \text{ domine } z' \Leftrightarrow \forall j :\ z_j \geq z'_j \quad \text{et} \quad \exists j' :\ z_{j'} > z'_{j'}$$

- Solution efficace :

x est efficace si $z(x)$ est non dominé

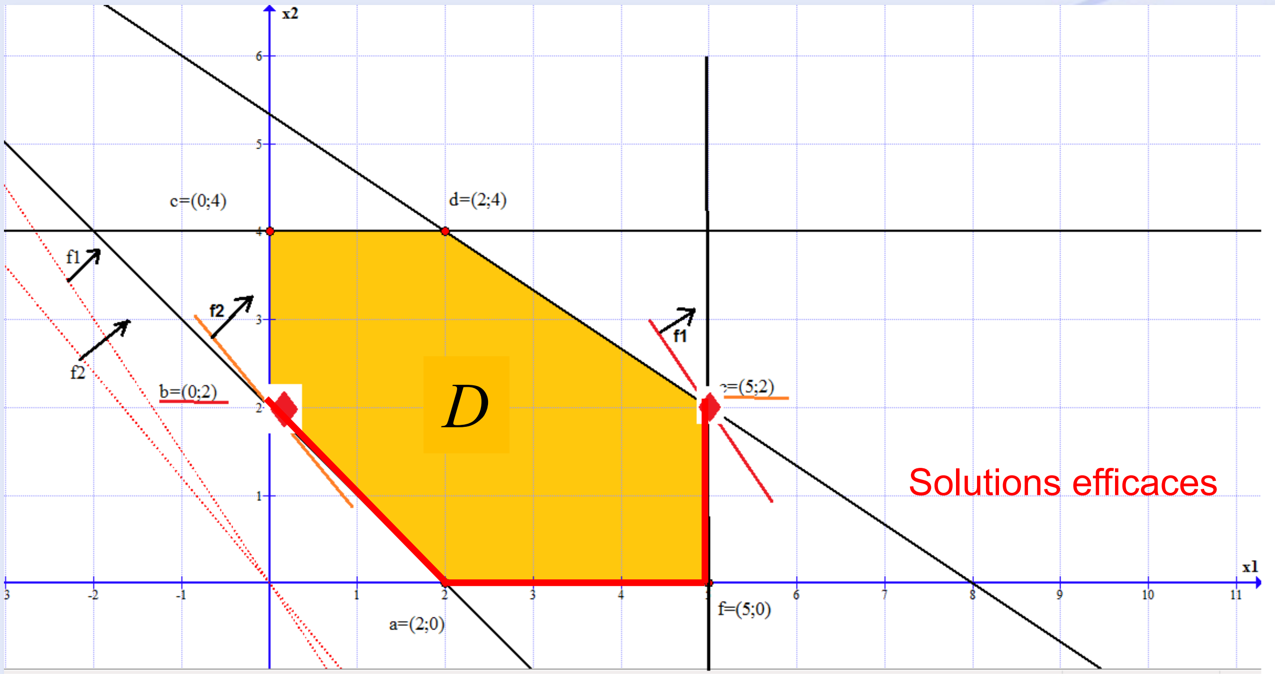
- Idée : se limiter aux solutions efficaces.

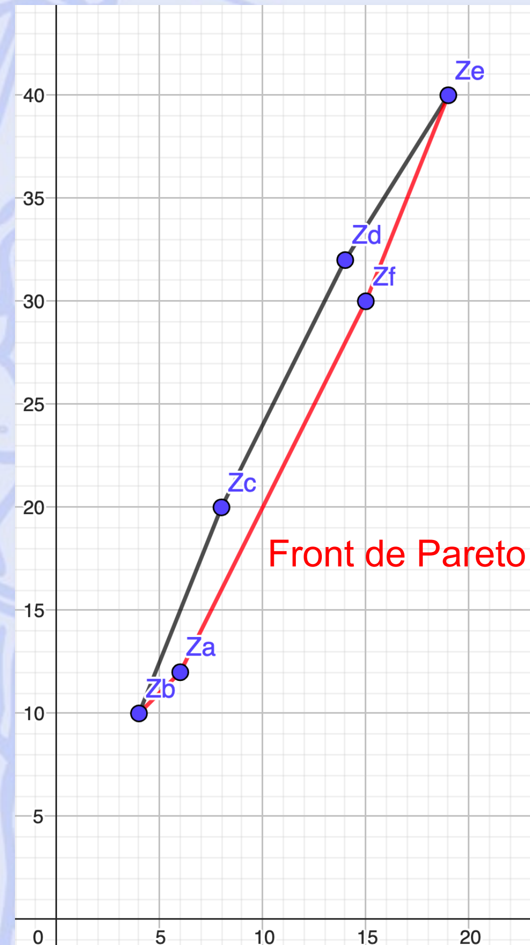
Un exemple simple

(source : Zoubir Ramdani - z.ramdani@univ-bba.dz)

- Image de D dans l'espace des critères :

f_2 à minimiser





	a (2;0)	b (0;2)	c (0;4)	d (2;4)	e (5;2)	f (5;0)
f_1	6	4	8	14	**19**	15
f_2	12	**10**	20	32	40	30

Point idéal et nadir

- Point idéal :

$$\bar{z} = \left(\max_{x \in D} z_1(x), \max_{x \in D} z_2(x), \cdots, \max_{x \in D} z_k(x)\right) \in \mathbb{R}^k$$

  - N'appartient généralement pas à Z

- Matrice des gains : $G \in \mathbb{R}^{k \times k}$

$$g_{ij} = z_i(\bar{x}_j)$$

- Nadir :

$$\underline{z} = \left(\min_j g_{1j}, \min_j g_{2j}, \cdots, \min_j g_{kj}\right) \in \mathbb{R}^k$$

Un exemple simple

- Point idéal :

  (19 ; 10)

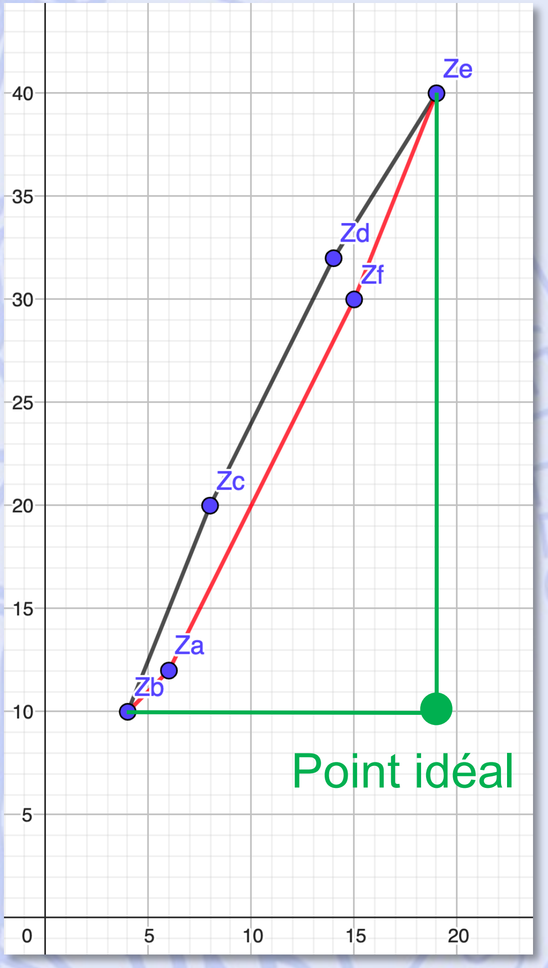
- Matrice des gains :

	e	b
f_1	**19**	4
f_2	40	**10**

- Nadir :

  (4 ; 40)

f_2 à minimiser



Choix d'une solution efficace

- Préférences du décideur ?
  - Poids alloués aux critères.
  - Point de mire (valeurs souhaitables).
  - ...
- Agrégation des critères :
  - Choix d'une fonction scalarisante.
  - Par exemple, somme pondérée des critères.
  - Autres approches...

Méthodes

- Préférences établies a priori :
  - Utilisation d'une fonction scalarisante.
  - Multicritère → Unicritère (LP)
- Méthodes interactives :
  - Itérations et construction progressive des préférences :
    - Etape de calcul → Proposition de solution(s).
    - Réaction du décideur → Préférences mieux connues.
    - Nouvelle étape de calcul...

Méthode de la somme pondérée

- L'importance relative des critères est déterminée par des poids.
- Fonction scalarisante : somme pondérée des critères.
- Avantages :
  - Multicritère → Unicritère (LP)
  - Facilité (simplexe).
- Inconvénients :
  - Attention à la détermination des poids (échelles des critères).
  - Multicritère → Unicritère (LP)

Un exemple simple

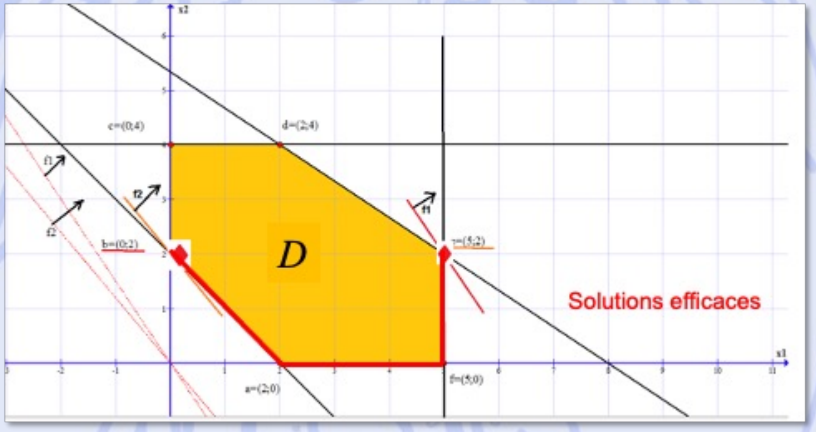
- Poids associés aux critères :
  - Hypothèse : 1 dm² équivaut à 0,1 kDZD → Poids résultants : 10 à 1
- Scalarisation – MOLP → LP :
  - Fonction objectif :

f_2 à minimiser

$$\begin{aligned} \max f_1(x_1,x_2) &= 3x_1 + 2x_2 \quad \textit{bénéfices (kDZD)} \\ \min f_2(x_1,x_2) &= 6x_1 + 5x_2 \quad \textit{déchets (dm2)} \end{aligned} \rightarrow \max z(x_1,x_2) = \begin{cases} 10f_1 - f_2 \\ 24x_1 + 15x_2 \end{cases}$$

  - Analyse de sensibilité :

f_1	f_2	x_1	x_2
10	1	5	2
10	4	5	0
10	5	2	0
10	12	0	2

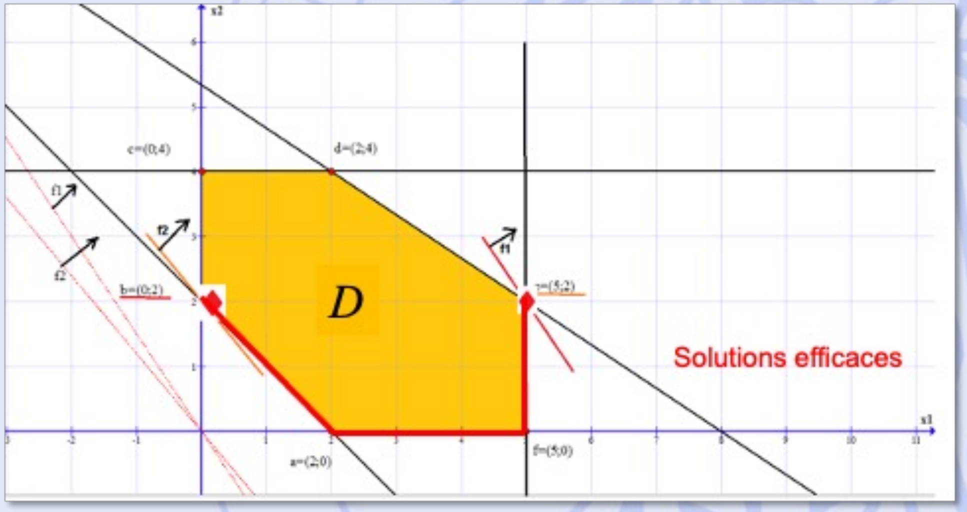


Méthode lexicographique

- Critères rangés par ordre d'importance décroissante.
- En commençant par le critère le plus important,
  - on cherche la solution optimale (unicritère),
  - on ajoute comme contrainte la valeur optimale trouvée pour ce critère,
  - on continue avec le critère suivant...
  - On réduit à chaque étape le domaine réalisable.
- Inconvénient :
  - Forte influence des critères les plus importants.

Un exemple simple

- Cas 1 – f_1 plus important que f_2 :
  - Solution optimale unique pour f_1 :
  - $x_1 = 5 \quad x_2 = 2 \quad \rightarrow \quad f_1 = 19 \quad f_2 = 40$
- Cas 2 – f_2 plus important que f_1 :
  - Solution optimale unique pour f_2 :
  - $x_1 = 0 \quad x_2 = 2 \quad \rightarrow \quad f_1 = 4 \quad f_2 = 10$



Goal programming

- On définit une valeur à atteindre (cible) T_j pour chaque critère z_j
- On définit une nouvelle fonction objectif :

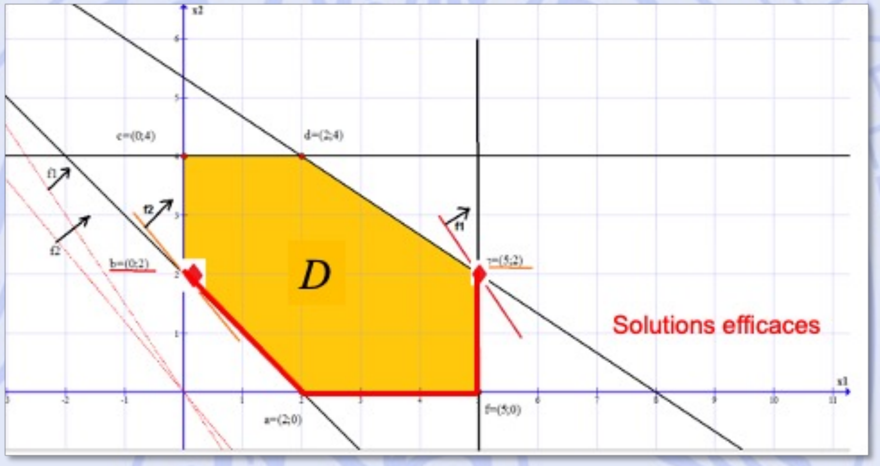
$$\min_{x \in D} \sum_{j=1}^{k} w_j \left| z_j(x) - T_j \right|$$

- Inconvénients :
  - Définition des poids w_j (échelles des critères).
  - Définition de la cible T_j.

Un exemple simple

- Poids associés aux critères :
  - Hypothèse : 1 dm² équivaut à 0,1 kDZD → Poids résultants : 10 à 1
  - Cibles : 19 kDZD et 10 dm² (idéal)
- Solution :

Cibles			
f_1	f_2	x_1	x_2
19	10	5	2
15	10	5	0
10	10	3,33	0
10	5	3,33	0
19	5	5	2
25	5	5	2
15	15	5	0



STEM
et variantes

- Méthodes interactives :
  - Alternance d'étapes de calcul et de collecte d'information.
  - Etablissement progressif des préférences.

- Inconvénient :
  - Longueur et (non-)convergence.
  - Exigeant pour le décideur.